Die Elementar-Mathematik,

für

den Schulunterricht bearbeitet

von

Professor Dr. Ludwig Kambly.

Vollständig in vier Teilen:

Erster Teil. Arithmetik und Algebra.

Zweiter Teil. Planimetrie.

Dritter Teil. Ebene u. sphärische Trigonometrie.

Vierter Teil. Stereometrie.

Zweiter Teil:

Planimetrie.

130. bis 133. Auflage.

Mit neun Tafeln, enthaltend 138 Figuren.



Ferdinand Hirt,

Königliche Universitäts- und Verlags-Buchhandlung.

Breslau 1904.

Vorwort zur Planimetrie.*)

Die Anforderungen, welche man an ein mathematisches Schulbuch zu stellen pflegt, sind noch immer so verschiedenartig, daß es wohl nötig scheint, das vorliegende Kompendium in Beziehung auf Ausführlichkeit, Anordnung und Methode durch einige Worte zu rechtfertigen.

Der Umfang desselben wurde nach dem Bedürfnis der Schule, für welche es zunächst geschrieben ist, und durch die Erwägung normiert, daß ein Leitfaden, in welchem aus Mangel an Zeit viel übergangen werden muß, weder den Lehrern, noch den Eltern der Schüler erwünscht sein kann. Ich habe demnach nur so viel aufgenommen, als sich bei ganzjährigen Kursen in Quarta, Tertia und Sekunda leicht bewältigen und durch die im Anhange beigefügten Aufgaben einüben läßt. Was mir weder durch sich selbst bedeutend, noch als Moment in der Entwicklung des Systems unentbehrlich erschien, habe ich ausgeschlossen und zugleich darauf Bedacht genommen, daß nicht durch Vorliebe für einzelne Abschnitte der gleichmäßigen Behandlung des Ganzen Eintrag geschehe.

Bei Entscheidung der Frage, ob ein Lehrbuch für Schulen die Beweise nur in einigen Hauptzügen andeuten, oder vollständig ausführen solle, war mir eine Rücksicht maßgebend, welcher man die Zustimmung wohl nicht versagen wird. Es kann nämlich bei einiger Frequenz der Schule derjenige Lehrer der Mathematik, welcher in mehreren Klassen zu unterrichten hat, eine sorgfältige Korrektur der Hefte auf die Dauer nicht durchführen. Und doch ist es von der höchsten Wichtigkeit, daß die Schüler für die Wiederholung, und vielleicht auch für die Vorbereitung, ein fehlerfreies Heft besitzen, da einmal eingewurzelte Irrtümer besonders bei den weniger Begabten nur mit großer Mühe wieder ausgerottet und unschädlich gemacht werden können. Dies hat mich bestimmt, nur die leichteren Beweise den Schülern zur Ausführung zu überlassen; die durch Beseitigung des Heftes gewonnene Zeit wird sehr zweckmäßig auf Korrektur von häuslichen und ex tempore in der Lehrstunde angefertigten Arbeiten verwendet werden; Gelegenheit, das Interesse der Schüler zu wecken und ihre Selbsttätigkeit zu fördern, wird sich noch in Menge darbieten, einer heuristischen Behandlung des Lehrstoffes aber darum nicht Abbruch geschehen, weil der Leitfaden *nicht nach genetischer*, sondern nach *synthetischer Methode* abgefaßt ist.

Für diese Form des Vortrags habe ich mich vornehmlich deshalb entschieden, weil durch genetische Darstellung der Mathematik die individuelle Bedeutung der einzelnen Sätze ganz verwischt wird, und weil sich eine ermüdende Breite schwer von ihr fernhalten läßt. Den ersteren Übelstand sucht man bei genetischem Verfahren dadurch zu beseitigen, daß man die Schüler den durchlaufenen Weg nochmals in synthetischer Weise zurücklegen läßt. Einfach und sachgemäß ist das nicht zu nennen, und man tut gewiß besser, zuerst nur erläuternd, wie ich es gewohnt bin, die fernere Entwicklung des Lehrstoffes anzudeuten oder von den Schülern finden zu lassen und dann zu der schließlich festgehaltenen Synthesis überzugehen. Was aber die Kürze der Darstellung betrifft, so erscheint sie mir, neben der Deutlichkeit und Präzision des Ausdruckes und neben strenger Begründung, als ein so unerläßliches

*) Hierzu ist erschienen: *Lehrsätze und Aufgaben aus der Planimetrie.* Als Ergänzung zu Kamblys Lehrbuch der Planimetrie zusammengestellt von Professor Hermann Roeder, Direktor der Realschule III zu Hannover. 3. Auflage, kart. 1 Mk.

Erfordernis, daß ich sie keiner Rücksicht aufopfern möchte. Außerdem ist, meines Erachtens, von einem Leitfaden nur noch eine verständige Gliederung des Stoffes zu verlangen, welche in der Entwicklung der räumlichen Gebilde einen stetigen Fortschritt an sich aufweist. Eine solche Anordnung des Inhaltes wird man in dem vorliegenden Leitfaden hoffentlich nicht vermissen.

Der Betrachtung einer Geraden, zweier einander schneidenden Geraden schließt sich naturgemäß die der Parallelen, der Dreiecke und der Parallelogramme an. Die regulären Polygone lassen sich nicht ohne Zwang vom Kreise trennen. Aus diesem Grunde, und weil die Betrachtung der Linien, Winke und Figuren am Kreise viel mehr als die Lehre vom Flächeninhalt und von der Ähnlichkeit den vorangehenden Theorien verwandt ist, gebührt dem Kreise ein früherer Platz, als man sonst wohl ihm anzuweisen pflegt. Daß er krummlinig ist, kommt hierbei wenig in Betracht; erst bei seiner Ausmessung tritt dies als fremdartiges Element in die Untersuchung ein und übt auf sie einen entschiedenen Einfluß aus. Die Vergleichung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren führt sofort zu seiner Berechnung. Damit fällt die Geometrie der Herrschaft der Zahl, des Maßes anheim, der wesentlichen Grundlage aller Proportionalität.

Aufgaben, welche unmittelbar aus einem Lehrsatze hervorgehen, in den Anhang zu verweisen, scheint mir deshalb ungerechtfertigt, weil sie größtenteils nichts anderes sind als Zusätze und von diesen sich nur durch die Form unterscheiden. War es unmöglich, sie in der richtigen Folge einzeln den betreffenden Sätzen einzureihen, wie die des § 61, oder ließen sie sich wegen ihres inneren Zusammenhanges nicht füglich trennen, wie die der §§ 121, 122 und 166, so habe ich sie dem Abschnitte hinzugefügt, aus welchem sie sich sämtlich ergeben.

Daß man zur Theorie der Parallelen (statt des elften Euklidischen) eines neuen Grundsatzes bedarf, nehme ich für zugestanden an. Als solcher empfahl sich mir das an die Spitze der Theorie gestellte Axiom oder dessen Contrapositio, nämlich: daß zwei in einer Ebene liegende gerade Linien bei verschiedener Richtung, hinreichend verlängert, einander schneiden müssen. Dasselbe ist vollkommen evident, läßt sich überdies noch aus dem Begriffe des Winkels leicht nachweisen und involviert das Wesen des Parallelismus, nämlich die Identität der Richtungen.

Die Definitionen des § 1 und die allgemeinen Grundsätze des § 5, welche, mit Ausnahme zweier, eigentlich in die Einleitung zur Mathematik überhaupt gehören und demnach auch in dem ersten Teile meines Werkchens aufgeführt sind, konnte ich darum nicht hinweglassen, weil der wissenschaftliche mathematische Unterricht auf Gymnasien und Realschulen nicht mit der Arithmetik, sondern mit der Geometrie zu beginnen pflegt.

In betreff der Gründe, welche für die Ausschließung der »neueren Geometrie« aus einem Leitfaden für den Schulunterricht sprechen, erlaube ich mir auf den Prospektus zu meiner Mathematik zu verweisen, in welchem ich dieselben ausführlich angegeben habe. —

Zum Schluß bemerke ich noch, daß die Figuren auf besondere Tafeln gezeichnet sind, damit die Schüler dieselben während der Lektion benutzen können, ohne den Text vor Augen zu haben.

Dr. L. Kambly.

Inhalt.

Einleitung.

Erklärungen.

§ 1.

Die Geometrie ist derjenige Teil der Mathematik, welcher sich mit den räumlichen Größen beschäftigt.

Unter Größe versteht man alles, was durch Vermehrung oder Verminderung sich seinem Wesen nach nicht ändert, mithin aus gleichartigen Teilen bestehend gedacht wird.

Eine Größe, deren Teile so zusammenhängen, daß das Ende des einen zugleich Anfang des anderen ist, heißt eine stetige oder räumliche Größe.

§ 2.

Der Raum ist die endlose Ausdehnung nach allen Richtungen; einen allseitig begrenzten Teil des Raumes nennt man einen mathematischen (geometrischen) Körper.

Anmerkung. Die Mathematik untersucht nur die Eigenschaft: Größe, deshalb beachtet auch die Geometrie an den Körpern nur den Raum, welchen sie einnehmen, nicht den Stoff, aus welchem sie bestehen. Physischer Körper.

§ 3.

Obgleich der Raum, und ebenso der begrenzte Raum, nach allen Richtungen ausgedehnt ist, so genügt es doch, ihn nach drei (aufeinander senkrechten) Hauptrichtungen, Dimensionen, zu betrachten.

Ausdehnung eines Körpers in die Länge, Breite und Dicke (Höhe oder Tiefe).

Das Verhältnis der Dimensionen eines Körpers bestimmt seine Gestalt.

§ 4.

Übereinstimmung in der Größe heißt Gleichheit (=), Übereinstimmung in der Gestalt heißt Ähnlichkeit (∽), Übereinstimmung in Größe und Gestalt heißt Kongruenz (≌).

Anmerkung. Das Zeichen für die Ungleichheit zweier Größen ist ($>$ oder $<$) ein Winkel, dessen Öffnung der größeren von beiden zugekehrt ist.

So bedeutet $a > b$, daß a größer als b,
und $a < b$, daß a kleiner als b ist.

§ 5.

Grundsatz. Jede räumliche Größe ist sich selbst gleich und ähnlich: $a \cong a$.

Folgerung 1. Räumliche Größen sind kongruent, wenn man sie so ineinander legen kann, daß sie in eine einzige zusammenfallen, einander decken.

Folgerung 2. Das Ganze ist gleich der Summe seiner Teile, so daß man das eine für das andere, wie überhaupt gleiche Größen füreinander, beliebig setzen kann.

Folgerung 3. Das Ganze ist größer als jeder seiner Teile.

Folgerung 4. Wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, so sind sie einander selbst gleich.

Wenn $a = b$
und $c = b$,
so ist auch $a = c$.*)

Folgerung 5. Gleiches zu gleichem addiert gibt gleiche Summen, gleiches von gleichem subtrahiert gibt gleiche Differenzen, gleiches mit gleichem multipliziert gibt gleiche Produkte, gleiches durch gleiches dividiert gibt gleiche Quotienten.

Wenn $a = b$
und $c = d$,
so ist auch $a + c = b + d$,
$a - c = b - d$,
$a \cdot c = b \cdot d$,
$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

---

*) Die Anwendung dieses Satzes pflege ich der Kürze wegen durch »drittens« anzudeuten.

Erklärungen.

§ 6.

Die Grenzen der Körper heißen Flächen; diese haben nur Ausdehnung in die Länge und Breite, sind also nicht Teile der Körper, welche sie begrenzen.

Die gesamte Begrenzung eines Körpers heißt seine Oberfläche.

Die Grenzen der Flächen heißen Linien; sie haben nur Ausdehnung in die Länge und sind nicht Teile der Flächen, welche sie begrenzen.

Die gesamte Begrenzung einer Fläche heißt ihr Perimeter (Umring); die Fläche selbst, insofern sie rings begrenzt ist, heißt Figur.*)

Die Grenzen der Linien heißen Punkte. Ein Punkt ist also gar nicht ausgedehnt, demnach nicht Teil einer Linie.

§ 7.

Es besteht also der Körper nicht aus Flächen, die Fläche nicht aus Linien, die Linie nicht aus Punkten. Wohl aber entsteht ein Körper durch Bewegung einer Fläche, eine Fläche durch Bewegung einer Linie, eine Linie durch Bewegung eines Punktes.

§ 8.

Eine Linie ist demnach der Weg eines sich bewegenden Punktes.

Eine gerade Linie ist diejenige, welche in allen ihren Punkten dieselbe Richtung hat, eine krumme diejenige, von welcher kein Teil gerade ist.

Gebrochene, gemischte Linien.

§ 9.

Eine Fläche, in welcher man von jedem Punkte nach allen Richtungen gerade Linien ziehen kann, heißt eine Ebene. Eine begrenzte Ebene heißt eine ebene Figur.

Mit den räumlichen Größen in einer Ebene beschäftigt sich »die Planimetrie« (Epipedometrie), mit den übrigen räumlichen Größen »die Stereometrie«.

---

*) Im weiteren Sinne des Wortes versteht man unter Figur jede graphische Darstellung einer räumlichen Größe.

Planimetrie.

Erster Abschnitt.

1. Von den geraden Linien und geradlinigen Winkeln.

§ 10.

Fig. 1. **Grundsatz.** Zwei Punkte (A und B) bestimmen die Lage und, wenn sie die Endpunkte sind, auch die Größe einer geraden Linie (AB) vollständig. Oder: Zwischen zwei Punkten (d. h. von dem einen zum anderen) ist nur eine einzige gerade Linie möglich.

Folgerung 1. Wenn zwei gerade Linien zwei Punkte gemein haben, so fallen sie in eine Linie zusammen.

Folgerung 2. Zwei (verschiedene) gerade Linien können nicht mehr als einen Punkt gemein haben, sich nur in **einem** Punkte schneiden.

Folgerung 3. Gleiche gerade Linien sind kongruent; d. h. man kann sie so aufeinander legen, daß sie in eine einzige zusammenfallen.

§ 11.

Forderungen. Zwei Punkte (durch eine gerade Linie) miteinander zu verbinden. Eine gegebene gerade Linie zu verlängern, um eine andere gegebene Linie usw.

§ 12.

Fig. 2. **Grundsatz.*)** Zwischen zwei Punkten ist die gerade Linie die kürzeste. $AB < AmnB$ und $< ApB$.

Anmerkung. Die Entfernung zweier Punkte wird also durch die gerade Linie angegeben, welche die beiden Punkte verbindet.

§ 13.

Fig. 3. **Erklärung.** Wenn man aus einem Punkte zwei gerade Linien (nach verschiedenen Richtungen) zieht, so entsteht ein geradliniger Winkel.

*) Hätte man ein Bedenken, diesen Satz als Grundsatz anzuerkennen, so müßte man ihn an einer weniger angemessenen Stelle, nämlich hinter § 56, einschalten und § 39 ihm folgen lassen.

Ein **geradliniger** Winkel ist also der Richtungsunterschied (die Abweichung) zweier von einem Punkte ausgehenden geraden Linien. Der Punkt heißt der **Scheitel**, die Linien heißen die **Schenkel** des Winkels. **Dreht** man den einen Schenkel um den Scheitel, bis er in die Richtung des anderen Schenkels fällt, so gibt diese **Drehung** die Größe der Abweichung der beiden Schenkel an.

Krummlinige, gemischtlinige Winkel. Unter einem »Winkel« schlechtweg versteht man immer einen geradlinigen Winkel.

Anmerkung. Man bezeichnet einen Winkel entweder durch **einen** Buchstaben in seiner Öffnung, oder durch **drei** Buchstaben, von denen der eine an den Scheitel, die beiden anderen an die Schenkel gesetzt werden. Dann liest und schreibt man sie so, daß der Buchstabe am Scheitel in die Mitte kommt. Ist kein Mißverständnis möglich, so genügt auch der Buchstabe am Scheitel; z. B. $\angle BAC$ oder $\angle \alpha$ oder $\angle A$.

§ 14.

Folgerung 1. Die Größe eines Winkels hängt nur von dem Grade der Abweichung, aber nicht von der Länge seiner Schenkel ab.

So ist z. B. $\angle \alpha > \angle \beta$. Fig. 4.

Folgerung 2. Gleiche Winkel sind kongruent.

Denn denkt man sich dieselben so aufeinander gelegt, daß ihre Scheitel und zwei Schenkel aufeinander fallen, so müssen es auch die beiden anderen; sonst wären ja die Winkel ungleich.

§ 15.

Erklärung 1. Ein Winkel, dessen Schenkel eine gerade Linie bilden, heißt ein **gestreckter** Winkel, z. B. $\angle DEF$. Fig. 5.

Ein Winkel, welcher kleiner ist als ein gestreckter, heißt ein **hohler** (**konkaver**), z. B. $\angle o$; ein Winkel, welcher größer ist als ein gestreckter, heißt ein **erhabener** (**konvexer**), z. B. $\angle \hat{p}$. Fig. 6.

Erklärung 2. Die konkaven Winkel sind entweder rechte oder schiefe.

Ein rechter Winkel (R) ist die Hälfte eines gestreckten; z. B. $\angle DEG = \frac{1}{2} DEF$. Fig. 5.

Von seinen Schenkeln sagt man, daß sie aufeinander **senkrecht** (**perpendikulär**) sind.

Die schiefen Winkel sind entweder spitz oder stumpf.

Ein **spitzer** Winkel ist kleiner, ein stumpfer Winkel ist größer als ein rechter; z. B. $\angle ACB < 1\,R$, $\angle ACD > 1\,R$. Fig. 7.

Folgerung. Ein gestreckter Winkel ist gleich der Summe zweier rechten Winkel ($= 2\,R$).

§ 16.

Lehrsatz. Alle gestreckten Winkel sind einander gleich.

Denn sie können mit ihren Scheiteln so aufeinander gelegt werden, daß sie einander decken (§ 10, Folg. 1).

Zusatz 1. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Denn wenn die Ganzen gleich sind, müssen es auch die Hälften sein.

Zusatz 2. In einem Punkte einer geraden Linie ist nur eine einzige Senkrechte auf ihr zu errichten möglich.

Denn gäbe es noch eine, so erhielte man zwei ungleiche rechte Winkel.

§ 17.

Erklärung 1. Zwei Winkel, die den Scheitel und einen Schenkel gemein haben und auf verschiedenen Seiten dieses Schenkels liegen, heißen anstoßende Winkel, z. B. ∠ ACB und BCD.

Fig. 7.

Erklärung 2. Anstoßende Winkel, deren nicht gemeinschaftliche Schenkel eine gerade Linie bilden, heißen Nebenwinkel, z. B. ∠ ABC und CBD.

Fig. 8.

Sie entstehen, wenn man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert.

Folgerung. Gleiche Nebenwinkel sind rechte Winkel. (Nach § 15.) Ein rechter Winkel ist also derjenige, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist.

§ 18.

Lehrsatz. Die Summe je zweier Nebenwinkel ist gleich zwei rechten Winkeln.

Fig. 8.

$$\angle ABC + CBD = 2R.$$

Denn sie bilden zusammen den gestreckten Winkel ABD.

Zusatz 1. Die Summe aller Winkel an einem Punkte und an einer Seite einer geraden Linie ist gleich zwei rechten. (Derselbe Grund.)

Zusatz 2. Die Summe aller Winkel um einen Punkt herum ist gleich vier rechten.

Denn verlängert man einen Schenkel über den Scheitel hinaus, so entstehen zwei Gruppen Winkel, deren jede 2R beträgt, beide zusammen also 4R.

§ 19.

Lehrsatz. Wenn die Summe zweier anstoßenden Winkel gleich zwei rechten ist, so sind die Winkel Nebenwinkel; d. h. ihre nicht gemeinschaftlichen Schenkel bilden eine gerade Linie.

Voraussetzung. $\angle ABC + CBD = 2R$. Fig. 9.

Behauptung. ABD ist eine gerade Linie.

Beweis. Angenommen, nicht BD, sondern irgend eine andere Linie, etwa BE, wäre die Verlängerung von AB, so müßte

$\angle ABC + CBE = 2R$ sein als Nebenwinkel.

Nach Voraussf. ist aber $\angle ABC + CBD = 2R$; folglich müßte

drittens $\angle ABC + CBE = ABC + CBD$ sein und,

wenn man $\angle ABC$ von beiden Summen hinwegnimmt, $\angle CBE = CBD$ nach § 5, Folg. 5. Dies ist aber nach § 5, Folg. 3 unmöglich; also ist die Annahme, eine andere Linie als BD sei die Verlängerung von AB, falsch und die Behauptung richtig.

Anmerkung. Der soeben bewiesene Satz ist die Umkehrung des Lehrsatzes in § 18. Die Art, wie er bewiesen wurde, heißt die indirekte (apagogische). Sie ist nur bei Umkehrungssätzen und bei Sätzen mit einer negativen Behauptung zulässig.

Wie kehrt man einen Lehrsatz um? wie, wenn er mehrere Voraussetzungen und Behauptungen hat? Wie führt man einen direkten, wie einen indirekten Beweis? Welcher frühere Beweis war indirekt?

§ 20.

Erklärung. Je zwei Winkel, welche zusammen zwei rechte betragen, heißen Supplementwinkel, z. B. $\angle$ m und n. Fig. 10.

Je zwei Winkel, welche zusammen einen rechten betragen, heißen Komplementwinkel, z. B. $\angle$ x und y.

§ 21.

Erklärung. Wenn man beide Schenkel eines Winkels über den Scheitel hinaus verlängert, so entstehen Scheitelwinkel, z. B. $\angle$ r und s, o und q. Fig. 11.

Scheitelwinkel sind also diejenigen Winkel, deren Schenkel zwei einander schneidende gerade Linien bilden, oder die gemeinschaftliche Nebenwinkel haben.

Lehrsatz. (Je zwei) Scheitelwinkel sind einander gleich. Fig. 11.

Voraussetzung. $\angle$ r und s sind Scheitelwinkel.

Behauptung. $\angle r = s$.

Beweis. $\angle r + q = 2R$ als Nebenwinkel,

desgleichen $\angle s + q = 2R$ " "

---*)

drittens $\angle r + q = s + q$ nach § 5, Folg. 4,

---

wenn man $\angle$ q hinwegnimmt, $\angle r = s$.

*) Ein horizontaler Strich unter einer Gleichung bedeutet: folglich.

§ 22.

Lehrsatz. (Umkehrung von § 21.) Wenn der eine von zwei gleichen Winkeln an den Nebenwinkel des anderen angefügt ist, so sind die Winkel Scheitelwinkel; d. h.?

Fig. 12. **Voraussetzung.** $\angle$ ABC = DBE und CBD eine gerade Linie.

Behauptung. ABE ist ebenfalls eine gerade Linie.

Beweis (indirekt). Angenommen, nicht BE, sondern BF wäre die Verlängerung von AB,

so wäre $\angle$ ABC = DBF nach vorigem Lehrsatz.
Nach Voraussetzung aber ist $\angle$ ABC = DBE;

müßte drittens $\angle$ DBF = DBE sein,
welches unmöglich ist, da der Teil nicht gleich dem Ganzen sein kann.

2. Von den Parallel-Linien.

§ 23.

Grundsatz. Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene so liegen, daß sie, wie weit man sie auch verlängere, einander nie schneiden, so haben sie dieselbe Richtung.

Erklärung. Zwei gerade Linien, die dieselbe Richtung haben, heißen parallel. Das Zeichen des Parallelismus ist || oder ⫲ oder =|=; z. B. AB || CD.

Fig. 13.

Folgerung 1. Wenn zwei gerade Linien in einer Ebene so liegen, daß sie, wie weit man sie auch verlängere, einander nie schneiden, so sind sie parallel.

Folgerung 2. Parallele Linien können, wie weit man sie auch verlängern möge, einander nie schneiden.

Denn sonst entstünde am Durchschnittspunkt ein Winkel, d. i. ein Richtungsunterschied, den die Linien eben nicht haben sollen.

§ 24.

Fig. 13. **Folgerungen.** 1) Durch einen Punkt A ist zu einer geraden Linie CD nur eine einzige Parallele AB möglich.

Denn jede andere durch A gelegte Linie AN weicht ja in ihrer Richtung von AB und demnach auch von CD ab.

2) Wenn eine gerade Linie (AN) die eine von zwei Parallelen (AB und CD) schneidet, so schneidet sie hinreichend verlängert auch die andere.

Denn schnitte sie dieselbe nicht, so wäre sie ihr parallel, und dies wäre ein Widerspruch gegen Folg. 1.

3) Zwei gerade Linien, die einer dritten parallel sind, sind selbst parallel.

Wenn AB und CD ∥ EF, so ist auch AB ∥ CD. Fig. 14.

Denn wäre AB nicht ∥ CD, so müßten sie hinreichend verlängert einander schneiden, und dann wären durch einen Punkt zu einer geraden Linie EF zwei Parallelen gelegt.

§ 25.

Erklärung. Zwei nicht parallele Linien heißen nach der Richtung, in welcher sie hinreichend verlängert einander schneiden, konvergent, nach der entgegengesetzten divergent.

§ 26.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten in zwei Punkten geschnitten werden, so entstehen acht Winkel, vier innere und vier äußere. Man teilt dieselben in vier Paare, in dreifacher Beziehung, nämlich entweder

in Gegenwinkel (korrespondierende Winkel), d. i. je ein innerer und ein äußerer Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie, aber an verschiedenen Winkelpunkten, Fig. 15.

z. B. $\angle$ m und q, n und r; o und s, p und t,

oder in Wechselwinkel, je zwei innere oder zwei äußere Winkel auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie und an verschiedenen Winkelpunkten,

z. B. $\angle$ o und r, p und q; m und t, n und s,

oder in entgegengesetzte Winkel, je zwei innere oder zwei äußere Winkel auf derselben Seite der schneidenden Linie,

z. B. $\angle$ o und q, p und r; m und s, n und t.

§ 27.

Lehrsatz. Wenn zwei Parallelen von einer geraden Linie geschnitten werden, so sind

1) die Gegenwinkel gleich,
2) die Wechselwinkel gleich,
3) die Summe je zweier entgegengesetzten Winkel = 2 R.

Voraussetzung. AB ∥ CD. Fig. 16.

Behauptung 1. $\angle n = r$ usw.

Beweis. Da AB und CD dieselbe Richtung haben, so haben sie auch denselben Richtungsunterschied gegen eine dritte Linie EF; d. h.

es ist $\angle n = r$, $m = q$ usw.

Behauptung 2. $\angle o = r$ usw.

Beweis. $\angle n = r$ nach Teil 1,
$\angle o = n$ als Scheitelwinkel,

drittens $\angle o = r$,

desgleichen auch die anderen Wechselwinkel, da zu gleichen Winkeln auch gleiche Nebenwinkel und gleiche Scheitelwinkel gehören.

Behauptung 3. $\angle p + r = 2R$ usw.

Beweis. $\angle o = r$ nach Teil 2,
$\angle p + o = 2R$ als Nebenwinkel,

auch $\angle p + r = 2R$.

§ 28.

Lehrsatz. (Umkehrung des vorigen.) Wenn zwei gerade Linien mit einer sie schneidenden entweder

1) zwei gleiche Gegenwinkel, oder
2) zwei gleiche Wechselwinkel bilden, oder
3) die Summe zweier (inneren) entgegengesetzten Winkel gleich zwei rechten ist, so sind die Linien parallel.

Fig. 17. **Voraussetzung 1.** $EGB = r$.

Behauptung. $AB \parallel CD$.

Beweis (indirekt). Angenommen, nicht AB wäre $\parallel CD$, sondern KGH, so müßte $\angle EGH = r$ sein nach § 27.
Nach Voraussetzung ist aber $\angle EGB = r$;

müßte drittens $\angle EGH = EGB$ sein,

welches unmöglich ist nach § 5, Folg. 3.

(Der Beweis kann auch direkt geführt werden.)

Fig. 16. **Voraussetzung 2.** $\angle o = r$.

Behauptung. $AB \parallel CD$.

Beweis. $\angle o = r$ nach Voraussetzung,
$\angle o = n$ nach § 21,

drittens $\angle r = n$,

nach Teil 1 $AB \parallel CD$.

Voraussetzung 3. $\angle p + r = 2R$.

Behauptung. $AB \parallel CD$.

Beweis. $\angle p + r = 2R$ nach Voraussetzung,
$\angle p + n = 2R$ nach § 18,

drittens $\angle p + r = p + n$,

auch $\angle r = n$,

nach Teil 1 $AB \parallel CD$.

§ 29.

Lehrsatz. Wenn die Summe zweier inneren entgegengesetzten Winkel kleiner als 2R ist, so konvergieren die sie bildenden Linien nach der Richtung, nach welcher diese Winkel liegen.

Voraussetzung. $\angle p + r < 2R$. Fig. 18.

Behauptung. AB und CD konvergieren rechts.

Beweis. Denkt man sich durch G die Linie GH so gezogen,

daß $\angle FGH + r = 2R$ ist, so muß,

da nach Vorauss. $\angle p + r < 2R$ ist,

$\angle p < \angle FGH$ sein,

also GB zwischen GF und GH liegen.

Da nun nach § 28, 3 $GH \parallel CD$ ist, muß GB gegen KD konvergieren.

§ 30.

Lehrsätze. 1) Alle Senkrechten auf einer geraden Linie sind parallel.

Voraussetzung. AB und CD senkrecht ($\perp$) auf MN. Fig. 19.

Behauptung. $AB \parallel CD$.

Beweis. $\angle ABD = CDN$ als R; außerdem sind sie Gegenwinkel, also $AB \parallel CD$ nach § 28, 1.

2) (Umkehrung.) Wenn die eine von zwei Parallelen auf einer geraden Linie senkrecht ist, so ist es auch die andere.

Voraussetzung. $AB \parallel CD$ und $AB \perp MN$.

Behauptung. Auch $CD \perp MN$.

Beweis. $\angle ABD = CDN$ als Gegenwinkel bei Parallelen,

$\angle ABD = R$ nach Voraussetzung,

auch $\angle CDN = R$.

Nr. 2 kann auch die Form annehmen:

Eine Senkrechte auf der einen von zwei Parallelen ist es auch auf der anderen.

§ 31.

Lehrsatz. Zwei Senkrechte auf den Schenkeln eines (nicht gestreckten) Winkels, in beliebigen Punkten errichtet, schneiden sich hinreichend verlängert.

Voraussetzung. $EG \perp AB$ und $DF \perp AC$ und $\angle BAC$ spitz. Fig. 20.

Behauptung. DF und EG schneiden sich bei hinreichender Verlängerung.

Beweis. Denkt man sich von A aus Linie $AL \parallel DF$ gezogen, also $\perp AC$, so ist

$\angle$ LAE $<$ R;
da nun $\angle$ AEG $=$ R nach Voraussſ.,
ſo iſt $\angle$ LAE $+$ AEG $<$ 2R;

konvergieren AL und EG nach § 29,
mithin auch DF und EG nach § 24, 2.

Anmerkung. Iſt $\angle$ BAC ein ſtumpfer, ſo bleibt der Beweis noch im weſentlichen derſelbe. Iſt er ein rechter, ſo folgt die Behauptung aus § 30, 1 und 24, 2.

§ 32.

Lehrſatz. Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweiſe parallel ſind, ſo ſind die Winkel gleich — es mögen nun beide Paar Parallelen vom Scheitel aus nach derſelben Richtung liegen, oder nach entgegengeſetzter.

Fig. 21.

1) **Vorausſetzung.** AB ∥ DE und BC ∥ EF.

Behauptung. $\angle$ B $=$ E.

Beweis. Verlängert man ED, bis ſie BC ſchneidet, ſo iſt $\angle$ B $=$ E, weil beide $= \angle$ m ſind nach § 27, 1.

2) Im zweiten Fall zeichne man den Scheitelwinkel des einen.

Anmerkung. Liegt ein Paar nach derſelben, das andere nach entgegengeſetzter Richtung, ſo ſind die Winkel Supplementwinkel.

Zweiter Abſchnitt.

1. Von den ebenen Figuren im allgemeinen.

§ 33.

Erklärung. Die ebenen Figuren ſind entweder geradlinig, oder krummlinig, oder gemiſchtlinig, je nachdem ihr Perimeter aus geraden, oder aus krummen Linien, oder aus beiden zugleich beſteht.

Die geradlinigen Figuren teilt man nach der Zahl der ſie begrenzenden Linien (Seiten) ein in Dreiſeite oder Dreiecke (Triangel), Vierſeite oder Vierecke uſw., Vielſeite oder Vielecke (Polygone).

Anmerkung. Die einfachſte geradlinige Figur iſt das Dreieck, weil zwei gerade Linien eine Ebene nicht vollſtändig begrenzen.

§ 34.

Erklärung. Die von den Polygonſeiten eingeſchloſſenen inneren Winkel heißen Polygonwinkel; ſind ſie konkav, ſo heißen ſie ausſpringend, ſind ſie konvex, einſpringend.

Verlängert man eine Seite einer geradlinigen Figur, so entsteht ein Außenwinkel. Ein **Außenwinkel** ist also der von einer Seite und der Verlängerung der anstoßenden gebildete Winkel.

Eine gerade Linie, welche zwei nicht benachbarte Winkelpunkte eines Polygons verbindet, heißt eine **Diagonale**.

Wieviel Diagonalen sind in einem Polygon von einem Winkelpunkte aus möglich? wieviel überhaupt?

Anmerkung. Eine gerade Linie, welche durch einen Punkt innerhalb einer Figur gezogen ist, muß offenbar, hinreichend verlängert, den Perimeter in mindestens zwei Punkten schneiden.

Ebenso müssen die Perimeter zweier Figuren, welche zum Teil innerhalb, zum Teil außereinander liegen, einander in mindestens zwei Punkten schneiden.

§ 35.

Die einzige krummlinige Figur, welche die niedere Planimetrie betrachtet, ist der Kreis.

Erklärung. Ein Kreis entsteht, wenn eine begrenzte gerade Linie (AC) sich um den einen ihrer Endpunkte (C) in einer Ebene herumbewegt, bis sie in ihre erste Lage zurückkehrt. Der **Kreis** ist also eine ebene Figur, rings begrenzt von einer krummen Linie, deren Punkte alle von einem Punkte (innerhalb) gleich weit entfernt sind. Fig. 22.

Der innere Punkt (C) heißt der **Mittelpunkt** (**Zentrum**), die krumme Linie die **Peripherie** (**Kreislinie**); ein beliebiger Teil derselben heißt **Bogen**, z. B. $\widehat{AB}$, AmB; die Entfernung eines Punktes der Peripherie vom Mittelpunkt heißt **Halbmesser** (**Radius**), z. B. AC; eine gerade Linie, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt **Sehne**, z. B. AB; eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heißt **Durchmesser** (**Diameter**), z. B. AD. Eine verlängerte Sehne heißt eine **Sekante**; z. B. AF.

Folgerung 1. Alle Radien eines Kreises sind einander gleich; desgleichen auch alle Durchmesser, weil sie das Doppelte der Radien sind.

So ist AC = BC = DC = EC, und AD = BE.

Folgerung 2. Ein Punkt liegt innerhalb des Kreises, wenn seine Entfernung vom Mittelpunkt kleiner als der Radius ist, außerhalb, wenn sie größer, und in der Peripherie, wenn sie ihm gleich ist.

Forderung. Um einen gegebenen Punkt mit einer gegebenen geraden Linie (**als Radius**) einen Kreis zu beschreiben.

Geschieht mittels des Zirkels.

§ 36.

Fig. 22. Die Sehne teilt den Kreis in zwei Abschnitte.

Erklärung. Ein Kreisabschnitt (Segment) ist ein Teil des Kreises, begrenzt von einer Sehne und dem dazu gehörigen Bogen, z. B. ⌓ AmB.

Ein Kreisausschnitt (Sektor) ist ein Teil des Kreises, begrenzt von zwei Radien und dem dazu gehörigen Bogen, z. B. △ AmBC. Ein Winkel, dessen Scheitel der Mittelpunkt ist, und dessen Schenkel Radien sind, heißt ein Zentriwinkel, z. B. ∠ ACB. Ein Winkel, dessen Scheitel ein Punkt der Peripherie ist, und dessen Schenkel Sehnen sind, heißt ein Peripheriewinkel, z. B. ∠ ABE.

§ 37.

Erklärung. Kreise von demselben Mittelpunkte heißen konzentrisch, Kreise von verschiedenen Mittelpunkten exzentrisch.

Die von den Peripherien zweier konzentrischen Kreise begrenzte Ebene wird ein Ring genannt.

2. Von den Dreiecken.

§ 38.

Fig. 23. Fig. 24. Fig. 25. **Erklärung.** Ein Dreieck, dessen Seiten einander gleich sind, heißt gleichseitig; sind nur zwei Seiten gleich, so heißt es gleichschenklig, die dritte Seite desselben die Basis (Grundlinie), der ihr gegenüber liegende Winkelpunkt die Spitze. Ein Dreieck ohne gleiche Seiten heißt ungleichseitig.

§ 39.

In jedem Dreieck ist die Summe je zweier Seiten größer als die dritte.

Fig. 33. $AC + CB > AB$, obgleich diese die größte Seite ist.

Dies folgt aus § 12. — Für die anderen Seiten versteht es sich von selbst.

Folgerung 1. Im gleichschenkligen Dreieck ist jede der beiden gleichen Seiten (jeder Schenkel) größer als die Hälfte der Basis.

Folgerung 2. In jedem Dreieck ist die Differenz je zweier Seiten kleiner als die dritte Seite.

Fig. 33. **Beweis.** $AC + CB > AB$, obgleich diese die größte Seite ist. Subtrahiert man nun auf beiden Seiten des Zeichens ($>$) die Seite CB, so bleibt
$AC > AB - CB$ oder $AB - CB < AC$; subtrah. man S. AC, so bleibt
$CB > AB - AC$ oder $AB - AC < CB$.

Daß $AC - CB < AB$ ist, versteht sich von selbst.

§ 40.

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe der Winkel = 2 R.

Behauptung. $\angle A + B + C = 2R$. Fig. 25.

Beweis. Denkt man sich durch C die DE ∥ AB gelegt, so ist

$\angle n + o + p = 2R$ nach § 18, Zus. 1,

ferner $\angle n = A$ und $\angle p = B$ } nach § 27, 2,

$\angle A + o + B = 2R$.

Folgerung 1. Die Summe je zweier Winkel eines Dreiecks ist kleiner als 2 R, nämlich um den dritten Winkel.

Folgerung 2. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel bezüglich gleich sind, so sind es auch die dritten.

Denn sie sind die Supplemente gleicher Winkelsummen.

Anmerkung. In Bezug auf ein Dreieck würde der Satz so lauten: Wenn man in einem Dreieck zwei Winkel kennt, so kennt man auch den dritten.

Folgerung 3. Ein Dreieck kann nur einen rechten, desgleichen nur einen stumpfen Winkel enthalten, und die beiden anderen müssen spitze Winkel sein — weil?

§ 41.

Erklärung 1. Man teilt die Dreiecke nach den Winkeln ein in:

rechtwinklige, die einen rechten } und zwei spitze W.,
stumpfwinklige, die einen stumpfen }

und spitzwinklige, die nur spitze Winkel enthalten.

Erklärung 2. Im rechtwinkligen Dreieck heißt die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die Hypotenuse, die ihn einschließenden heißen Katheten.

§ 42.

Lehrsatz. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist gleich der Summe der beiden ihm gegenüber liegenden inneren Winkel.

Behauptung. $\angle CBD = A + C$. Fig. 26.

Beweis. $\angle CBD + o = 2R$ als Nebenwinkel,

$\angle A + C + o = 2R$ nach § 40,

drittens $\angle CBD + o = A + C + o$,

$\angle CBD = A + C$ nach § 5, Folg. 5.

Wie läßt sich der Satz ohne Zuziehung von § 40 erweisen?

Folgerung. Der Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder der beiden inneren ihm gegenüber liegenden Winkel.

Wie groß ist die Summe der drei Außenwinkel eines Dreiecks?

§ 43.

Lehrsatz. Wenn man einen Punkt innerhalb eines Dreiecks mit den Endpunkten einer Seite verbindet, so ist die Summe der beiden anderen Seiten größer als die Summe der Verbindungslinien, der von ihnen eingeschlossene Winkel aber kleiner als der Winkel der Verbindungslinien.

Fig. 27. **Behauptung 1.** $AC + CB > AD + DB$.

Beweis. Verlängert man AD, bis sie BC in E trifft, so ist im Dreieck ACE Seite $AC + CE > AE$. Addiert man auf beiden Seiten EB hinzu, so ist $AC + CB > AE + EB$.

Ebenso läßt sich dartun, daß

$$AE + EB > AD + DB;$$

um so mehr $AC + CB > AD + DB$.

Behauptung 2. $\angle ADB > C$.

Beweis. $\angle ADB > AEB$ nach § 42, Folg.,
$\angle AEB > C$ desgleichen,

um so mehr $\angle ADB > C$.

§ 44.

Lehrsatz. (Erster Kongruenzsatz.) Wenn in zwei (oder mehr) Dreiecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel bezüglich gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent.

Fig. 28. **Voraussetzung.** Seite $AB = DE$, $AC = DF$ und $\angle A = D$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong DEF$.

Beweis. Denkt man sich $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$ gelegt, daß $\angle A$ auf $\angle D$, d. h. Punkt A auf D, Seite AB längs DE, AC längs DF fällt: so muß, da $AB = DE$ und $AC = DF$ ist, auch Punkt B auf E und Punkt C auf F fallen, mithin auch (nach § 10, Grundſ.) Seite BC auf EF. Die Dreiecke decken also einander.

§ 45.

Zusatz. In kongruenten Dreiecken sind die **homologen Stücke** gleich, d. h. diejenigen Seiten, welche gleichen Winkeln, und diejenigen Winkel, welche gleichen Seiten gegenüber liegen.

Fig. 28. Denn nach vorigem Beweise ist Seite $BC = EF$, $\angle B = E$, $\angle C = F$, da sie einander decken. Daß sie homolog sind, sieht man aus der Figur.

§ 46.

Lehrsatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die eingeschlossenen Winkel aber ungleich sind, so sind auch ihre Gegenseiten ungleich, und zwar ist die die größere, welche dem größeren Winkel gegenüber liegt.

Voraussetzung. Seite $AB = DE$, $BC = EF$, aber $\angle B < E$. Fig. 29.

Behauptung. Seite $AC < DF$.

Beweis. Da $\angle B < E$ ist, so muß $\angle A + C > D + F$, also entweder $\angle A > D$ oder $C > F$, oder beides zugleich sein. Es sei, wie in Fig. 29, $\angle A > D$. Dann denke man sich $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$ gelegt, daß die an dem größeren Winkel A anliegende Seite AB auf DE, d. h. Punkt A auf D und B auf E fällt; so muß Seite AC außerhalb des Dreiecks DEF, etwa in die Richtung DG, Seite BC aber zwischen ED und EF, etwa in die Richtung EG, $\triangle ABC$ also in die Lage DEG zu liegen kommen.

Nun ist $DH + HG > DG$ nach § 39,
$HE + HF > EF$ desgleichen,

durch Addition $DF + EG > DG + EF$,
$DF > DG$, d. i. AC.

§ 47.

Lehrsatz. (Zweiter Kongruenzsatz.) Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten bezüglich gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent.

Voraussetzung. Seite $AB = DE$, $AC = DF$, $BC = EF$. Fig. 28.

Behauptung. $\triangle ABC \cong DEF$.

Beweis. Kann man dartun, daß ein Winkel in dem einen Dreieck so groß als der gleichliegende im anderen ist, so sind die Dreiecke kongruent nach § 44. — Es ist aber z. B. $\angle A = D$; denn wäre $\angle A \gtrless D$, so müßte nach vorigem Paragraph Seite $BC \gtrless EF$ sein. Dies widerspricht der Voraussetzung.

§ 48.

Lehrsatz. (Umkehrung von § 46.) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten bezüglich gleich, die dritten aber ungleich sind, so sind auch ihre Gegenwinkel ungleich, und zwar ist der der größere, welcher der größeren Seite gegenüber liegt.

Voraussetzung. Seite $AB = DE$, $BC = EF$, aber $AC < DF$. Fig. 30.

Behauptung. $\angle B < E$.

Beweis (indirekt). Wäre $\angle B$ nicht $< E$, sondern $= E$, so wäre $\triangle ABC \cong DEF$ nach § 44, also Seite $AC = DF$ nach § 45. Wäre $\angle B > E$, so wäre Seite $AC > DF$ nach § 46. Beides widerspricht der Voraussetzung.

§ 49.

Lehrsatz. (Dritter Kongruenzsatz, Teil 1.) Wenn in zwei Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bezüglich gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent.

Fig. 28.

Voraussetzung. Seite AB = DE, ∠ A = D und ∠ B = E.

Behauptung. △ ABC ≌ DEF.

Beweis. Denkt man sich Dreieck ABC so auf Dreieck DEF gelegt, daß Seite AB auf DE, d. h. Punkt A auf D und B auf E fällt, so muß, da ∠ A = D, Seite AC längs DF, und da ∠ B = E, Seite BC längs EF fallen, mithin auch Punkt C auf F, weil zwei gerade Linien, DF und EF, sich nur in *einem* Punkte treffen.

§ 50.

Lehrsatz. (Dritter Kongruenzsatz, Teil 2.) Wenn in zwei Dreiecken eine Seite, ein anliegender und der gegenüber liegende Winkel bezüglich gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent.

Fig. 28.

Voraussetzung. Seite AB = DE, ∠ A = D und ∠ C = F.

Behauptung. △ ABC ≌ DEF.

Beweis. ∠ B = E nach § 40, Folg. 2,

△ ABC ≌ DEF nach vorigem Paragraph.

Zusatz. Dreiecke sind also kongruent, wenn eine Seite und zwei gleichliegende Winkel in ihnen bezüglich gleich sind.

§ 51.

Lehrsatz. Im gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

Fig. 31.

Voraussetzung. Seite AC = BC.

Behauptung. ∠ A = B.

Konstruktion und Beweis. Denkt man sich ∠ C durch CD halbiert, so ist in den Dreiecken ACD und BCD

Seite AC = BC nach Voraussetzung,
Seite CD = CD
und ∠ o = p nach Konstruktion,

△ ACD ≌ BCD,

∠ A = B nach § 45.

§ 52.

Zusätze. 1) Der Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist ein spitzer Winkel. — Dies folgt aus § 40, Folg. 1.

2) Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel einander gleich.

3) Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks ist = $\frac{2}{3}$ R.

Erklärung. Eine Figur, in welcher alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind, heißt eine *reguläre* (regelmäßige) Figur.

Das gleichseitige Dreieck ist also eine reguläre Figur.

§ 53.

Zusatz. Der Außenwinkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist doppelt so groß als jeder Basiswinkel. — Dies folgt aus § 42.

§ 54.

Lehrsatz. (Umkehrung von § 51.) Wenn in einem Dreieck zwei Winkel gleich sind, so sind es auch ihre Gegenseiten; das Dreieck ist also gleichschenklig.

Voraussetzung. $\angle A = B$. Fig. 31.

Behauptung. Seite $AC = BC$.

Beweis. Denkt man sich $\angle C$ durch CD halbiert, so ist

Dreieck $ACD \cong BCD$ nach § 50,

Seite $AC = BC$ als hom. St.

Zusatz. Wenn in einem Dreieck alle Winkel gleich sind, so sind es auch alle Seiten; das Dreieck ist also gleichseitig.

§ 55.

Lehrsatz. Der größeren Seite eines Dreiecks liegt auch der größere Winkel gegenüber.

Voraussetzung. Seite $AB > BC$. Fig. 32.

Behauptung. $\angle ACB > A$.

Beweis. Schneidet man BC auf AB von B aus ab, $= BD$, und zieht DC, so ist

$\angle o = p$ nach § 51,

$\angle o > A$ nach § 42, Folg.,

auch $\angle p > A$,

um so mehr $\angle ACB > A$.

§ 56.

Lehrsatz. (Umkehrung des vorigen.) Dem größeren Winkel eines Dreiecks liegt auch die größere Seite gegenüber.

Voraussetzung. $\angle C > A$. Fig. 33.

Behauptung. Seite $AB > BC$.

Beweis (indirekt). Wäre AB nicht $> BC$, sondern $= BC$, so müßte $\angle C = A$ sein nach § 51. Wäre $AB < BC$, so müßte $\angle C < A$ sein nach vorigem Paragraph. Beides widerspricht der Voraussetzung.

(Der Beweis kann auch direkt geführt werden.)

Zusatz. Im stumpfwinkligen Dreieck ist die dem stumpfen Winkel, im rechtwinkligen die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite die größte.

§ 57.

Lehrsatz. Von einem Punkte nach einer geraden Linie ist nur eine einzige Senkrechte zu **fällen** möglich, und sie ist die kleinste von allen Linien, die man von jenem Punkte nach der geraden Linie ziehen kann. Alle anderen Geraden sind paarweise vorhanden, nämlich einander gleich, wenn ihre Endpunkte sich vom Fußpunkt der Senkrechten gleich weit entfernen, und um so größer, je weiter sie sich von ihm entfernen.

Fig. 34. **Voraussetzung.** $AB \perp MN$.

Behauptung 1. Keine andere von A aus gezogene gerade Linie ist ebenfalls $\perp MN$.

Beweis. Wäre auch $AO \perp MN$, so entstünde ein Dreieck AOB mit zwei rechten Winkeln.

Behauptung 2. $AM, AC, AD, AE > AB$.

Denn die Hypotenuse ist größer als jede der Katheten nach § 56, Zusatz.

Voraussetzung. $AB \perp MN$ und $BC = BE$.

Behauptung 3. $AC = AE$.

Beweis. $\triangle ABC \cong ABE$ nach § 44,

Seite $AC = AE$ nach § 45.

Behauptung 4. $AE > AD$.

Beweis. $\angle ADE > ABD$ nach § 42, Folg., mithin ein stumpfer Winkel; folglich $AE > AD$ nach § 56, Zus.

Zusatz. Die Entfernung eines Punktes von einer geraden Linie wird von der Senkrechten angegeben, die man aus ihm auf die Linie fällen kann.

§ 58.

Lehrsatz. (Vierter Kongruenzsatz.) Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und der der größeren von ihnen gegenüber liegende Winkel bezüglich gleich sind, so sind die Dreiecke kongruent.

Fig. 35. **Voraussetzung.** Seite $AB = DE$, $AC = DF$, $\angle B = E$ und $AC > AB$, $DF > DE$.

Behauptung. $\triangle ABC \cong DEF$.

Beweis. Kann man dartun, daß Seite $BC = EF$ ist, so sind die Dreiecke kongruent nach § 44 oder 47. — Es ist aber $BC = EF$; denn wäre sie $< EF$, etwa $= EG$, so würde, wenn man DG zieht,

$\triangle ABC \cong DEG$ sein nach § 44,

Seite $AC = DG$ als homol. St.

Es ist aber $AC = DF$ nach Voraussetzung;

müßte drittens $DG = DF$ sein,

$\angle F = DGF$ nach § 51.

$\angle$ DGF ist aber $>$ E nach § 42; also müßte auch $\angle$ F $>$ E und demnach Seite DE $>$ DF sein, welches der Voraussetzung widerspricht.

Wäre BC $>$ EF, also EF $<$ BC, so würde sich derselbe Widerspruch am Dreieck ABC ergeben.

§ 59.

Zusatz. Rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn in ihnen entweder zwei gleichliegende Seiten oder ein spitzer Winkel und eine gleichliegende Seite bezüglich gleich sind.

§ 60.

Zusatz. Je drei Stücke, deren Gleichheit die Kongruenz zweier Dreiecke bedingt, bestimmen ein Dreieck vollständig, so daß man aus ihnen nur ein Dreieck konstruieren kann.

Aufgaben.

§ 61.

I. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die drei Seiten a, b und c gegeben sind.

Anmerkung. Soll ein Dreieck möglich sein, so muß nach § 39 die Summe auch der beiden kleineren Seiten größer als die dritte sein.

Auflösung. Man ziehe AB $=$ c, beschreibe mit a aus A oder B und mit b aus B oder A Kreisbogen und verbinde die Durchschnittspunkte der zusammengehörigen Bogen mit A und B; so entstehen vier der Lage nach verschiedene kongruente Dreiecke. Fig. 36.

Ein spezieller Fall hiervon ist die Aufgabe:

1) Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite gegeben ist.

2) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Basis und ein Schenkel gegeben ist.

Anmerkung. Das Dreieck ist nur dann möglich, wenn der Schenkel größer als die Hälfte der Basis ist (nach § 39, Folg. 1).

II. Einen Winkel zu zeichnen, welcher einem gegebenen Winkel α gleich ist. Fig. 37.

Auflösung. Man vervollständige den Winkel α zu einem gleichschenkligen Dreieck $\alpha\beta\gamma$, indem man vom Scheitel aus auf den Schenkeln gleiche Stücke abschneidet und die Endpunkte verbindet; dann konstruiere man aus seinen drei Seiten nach voriger Auflösung ein ihm kongruentes Dreieck ABC, und es ist

$$\angle A = \alpha \text{ als homologe Stücke.}$$

Anmerkung 1. Dreieck $\alpha\beta\gamma$ braucht nicht gleichschenklig zu sein.

Anmerkung 2. Ist der Punkt, welcher Scheitel, und die Linie, welche Schenkel werden soll, gegeben, so lautet die Aufgabe:

Einen gegebenen Winkel an eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte anzutragen.

Fig. 38. III. Durch einen gegebenen Punkt A zu einer gegebenen geraden Linie BC eine Parallele zu legen.

Auflösung. Man ziehe durch A eine BC schneidende gerade Linie und trage einen der entstehenden Winkel an sie in A als Gegenwinkel oder als Wechselwinkel an.

IV. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben sind.

Auflösung. Man zeichne einen dem gegebenen gleichen Winkel, mache seine Schenkel gleich den gegebenen Linien und verbinde die Endpunkte.

V. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ gegeben sind.

Anmerkung. Das Dreieck ist nur dann möglich, wenn

$$\angle \beta + \gamma < 2R \text{ ist.}$$

Auflösung. Man zeichne eine der a gleiche Linie AB, trage $\angle \beta$ in A und $\angle \gamma$ in B an sie an und verlängere die freien Schenkel, bis sie einander treffen.

VI. Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite a, ein anliegender Winkel β und der gegenüber liegende Winkel α gegeben ist.

Fig. 39. **Auflösung.** Man zeichne das Supplement zur Summe $\alpha + \beta$; dieses (γ) ist der zweite anliegende Winkel. Dann verfahre man nach voriger Auflösung.

VII. Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem zwei Seiten a und b und der der größeren von ihnen gegenüber liegende Winkel α gegeben sind.

Fig. 40. **Auflösung.** Da $\angle \alpha$ der a gegenüber liegen soll, so muß er an b anliegen. Man trage also $\angle \alpha$ an b in A an, beschreibe aus B mit a einen Kreisbogen, welcher AN in C schneidet, und verbinde die freien Punkte B und C.

Anmerkung 1. Das Dreieck ist immer möglich; weshalb?

Anmerkung 2. Sind von einem Dreieck zwei Seiten a und b und der der kleineren von ihnen gegenüber liegende Winkel β gegeben, so ist in vielen Fällen gar kein Dreieck möglich; in anderen ergeben sich zwei verschiedene, und nur in einem ganz speziellen Falle ergibt sich ein einziges, nämlich ein rechtwinkliges Dreieck.

Fig. 41, 1. Fig. 41, 2. Fig. 41, 3. Trägt man nämlich an AB, die der größeren a gleich ist, $\angle \beta$ in A an und beschreibt aus B mit b einen Kreisbogen, so trifft dieser die AN *nicht*, wenn b kleiner ist als die von B auf AN mögliche Senkrechte BP; er trifft AN *zweimal*, wenn $b > BP$; er trifft AN *einmal*, wenn $b = BP$ ist (s. § 57).

Folgerung. Zwei Seiten und der der kleineren von ihnen gegenüber liegende Winkel bestimmen ein Dreieck nur dann vollständig, wenn man außerdem weiß, ob der Gegenwinkel der größeren Seite ein spitzer (△ ABC in Fig. 41, 2) oder ein stumpfer (△ ABC) ist. Ergibt sich als solcher ein rechter Winkel, so ist das Dreieck natürlich ebenfalls bestimmt.

Demnach sind zwei Dreiecke noch in welchem Falle kongruent?

§ 62.

Lehrsatz. Wenn man über einer geraden Linie, entweder nach derselben Richtung, oder nach entgegengesetzter, zwei gleichschenklige Dreiecke errichtet und durch ihre Spitzen eine gerade Linie zieht, so halbiert diese

1) die Winkel an der Spitze,
2) die gemeinschaftliche Basis;
3) steht sie senkrecht auf der Basis.

Voraussetzung. Seite AC = BC und AD = BD. Fig. 42.

Behauptung 1. ∠ o = p und ∠ x = y.

Beweis. △ ACD ≌ BCD nach § 47 usw.

Behauptung 2 und 3. AE = BE, CE ⊥ AB.

Beweis. △ AEC ≌ BEC nach § 44,

AE = BE
und ∠ AEC = BEC } nach § 45.

∠ AEC und BEC sind aber auch Nebenwinkel, mithin rechte Winkel, und EC ⊥ AB.

(Der Beweis gilt auch für den Fall, daß die beiden Dreiecke nach derselben Richtung liegen.)

Aufgaben.

§ 63.

VIII. Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

Auflösung. Man schneide vom Scheitel aus auf den Schenkeln gleiche Stücke ab, verbinde die Endpunkte, errichte über der Verbindungslinie noch ein gleichschenkliges Dreieck und verbinde ihre Spitzen. (Voriger Lehrsatz, Teil 1.)

IX. Eine gegebene gerade Linie zu halbieren.

Auflösung. Man errichte über ihr als Basis zwei gleichschenklige Dreiecke und ziehe durch ihre Spitzen eine gerade Linie. (Voriger Lehrsatz, Teil 2.)

X. Von einem gegebenen Punkte A einer gegebenen geraden Linie MN eine Senkrechte auf ihr zu **errichten**. Fig. 43.

Auflösung. Man schneide von A aus auf MN gleiche Stücke ab,

AB = AC, errichte über BC ein gleichschenkliges Dreieck BCD und verbinde seine Spitze D mit dem gegebenen Punkte A.

Beweis. △ BAD ≅ CAD nach § 47,

∠ BAD = CAD nach § 45,

AD ⊥ MN nach § 17, Folg.

Fig. 44. XI. Von einem Punkte A auf eine gegebene gerade Linie MN eine Senkrechte zu **fällen**.

Auflösung. Man beschreibe aus A einen Kreisbogen, welcher MN zweimal trifft, in B und C, errichte über BC ein gleichschenkliges Dreieck BCD und verbinde seine Spitze D mit dem gegebenen Punkte A. (Voriger Lehrsatz, Teil 3.)

Fig. 45. XII. In dem Endpunkte A einer gegebenen geraden Linie AN eine Senkrechte auf ihr zu errichten.

Auflösung. Man errichte von A aus über einem Teile von AN ein gleichseitiges Dreieck ABC, verlängere die Gegenseite von A um sie selbst, bis D, und verbinde D mit A.

Beweis. ∠ CAB = $\frac{2}{3}$ R nach § 52, Zus. 3,

∠ DAC = $\frac{1}{3}$ R nach § 53,

∠ DAB = 1 R.

Anmerkung. △ ABC kann auch nur gleichschenklig sein, wie sich aus § 66 ergibt.

XIII. Einen rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen.

Die Auflösung folgt aus der vorigen.

§ 64.

Lehrsatz. Die Linie, welche den Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks halbiert, halbiert auch die Basis und steht auf ihr senkrecht.

Fig. 46. **Voraussetzung.** Seite AC = BC und ∠ o = p.

Behauptung. AD = BD und CD ⊥ AB.

Beweis. △ ADC ≅ BDC nach § 44,

Seite AD = BD
und ∠ ADC = BDC } nach § 45.

Da nun ∠ ADC und BDC Nebenwinkel sind, so sind sie rechte Winkel.

§ 65.

Die Umkehrungen dieses Lehrsatzes sind:

1) Die Linie, welche die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Basis verbindet, steht auf der Basis senkrecht und halbiert den Winkel an der Spitze.

Voraussetzung. Seite AC = BC und AD = BD. Fig. 46.

Behauptung. $CD \perp AB$ und $\angle o = p$.

Beweis. $\triangle ADC \cong BDC$ nach § 47 usw.

2) Die Senkrechte aus der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks, auf die Basis gefällt, halbiert diese und den Winkel an der Spitze.

Voraussetzung. Seite AC = BC und $CD \perp AB$.

Behauptung. AD = BD und $\angle o = p$.

Beweis. $\triangle ACD \cong BCD$ nach § 58 usw.

3) Die Senkrechte aus der Mitte der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks trifft die Spitze und halbiert den Winkel an der Spitze.

Voraussetzung. Seite AC = BC und AD = BD. Fig. 47.

Behauptung. Eine Senkrechte aus D trifft C und halbiert $\angle C$.

Beweis (indirekt). Angenommen, sie träfe C nicht, sondern wäre DE: so würde, wenn man DC zieht, auch $DC \perp AB$ sein nach Nr. 1, also ein Widerspruch gegen § 16, Zus. 2, sich ergeben.

4) Wenn in einem Dreieck ein Winkelpunkt senkrecht über der Mitte der Gegenseite liegt, so ist das Dreieck gleichschenklig.

Voraussetzung. AD = BD und $CD \perp AB$. Fig. 46.

Behauptung. AC = BC.

Beweis. $\triangle ADC \cong BDC$ nach § 44 usw.

Anmerkung. Noch zwei Umkehrungen sind möglich.

§ 66.

Lehrsatz. Wenn ein Winkelpunkt eines Dreiecks von der Mitte der Gegenseite um deren Hälfte entfernt ist, so ist der Winkel ein rechter.

Voraussetzung. AD = DC = DB. Fig. 48.

Behauptung. $\angle ABC = R$.

Beweis. $\left.\begin{array}{l}\angle ADB = 2y \\ \text{und } \angle CDB = 2x\end{array}\right\}$ nach § 53,

$\overline{\angle ADB + CDB}$, d. i. $2R = \overline{2x + 2y}$,

$\angle x + y$, d. i. $ABC = 1R$.

Wie beweist man den Satz mittels § 51?

Erklärung. Eine gerade Linie, welche einen Winkelpunkt eines Dreiecks mit der Mitte der Gegenseite verbindet, heißt eine Transversale.*)

Demnach kann der vorige Satz wie lauten?

*) Im weiteren Sinne versteht man unter Transversale jede gerade Linie, welche von einem Winkelpunkte eines Dreiecks nach der Gegenseite gezogen ist, ja überhaupt jede gerade Linie, welche andere gerade Linien schneidet.

§ 67.

Lehrsatz. (Umkehrung von § 66.) Im rechtwinkligen Dreieck ist die Transversale nach der Hypotenuse gleich der Hälfte der Hypotenuse.

Fig. 49.

Voraussetzung. $\angle ABC = R$ und $AD = DC$.

Behauptung. $DB = AD = DC$.

Beweis (indirekt). Angenommen, nicht DB wäre = AD, sondern DE, welche $\gtrless$ DB sein kann: so müßte, wenn man AE und EC zieht, $\angle AEC = R$ sein nach § 66.

Nach Voraussetzung aber ist $\angle ABC = R$;

müßte $\angle AEC = ABC$ sein,

was dem § 43, 2 widerspricht.

§ 68.

Lehrsatz. Die drei Senkrechten aus den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte, welcher von den Winkelpunkten gleich weit entfernt ist.

Fig. 50 a u. b.

Voraussetzung. D, E und F sind die Mitten der Seiten, und $DG \perp AB$, $EG \perp AC$; sie schneiden sich nach § 31.

Behauptung. $FG \perp CB$, und $AG = BG = CG$.

Beweis. $\triangle ADG \cong BDG$ nach § 44,

$AG = BG$ nach § 45.

Desgl. $\triangle AEG \cong CEG$,

$AG = CG$,

drittens $BG = CG$,

$\triangle BFG \cong CFG$ nach § 47,

$\angle CFG = BFG$, mithin rechte.

Anmerkung. Im rechtwinkligen Dreieck schneiden sich die Senkrechten in der Mitte der Hypotenuse (§ 67), im spitzwinkligen innerhalb, im stumpfwinkligen außerhalb des Dreiecks.

§ 69.

Lehrsatz. Die drei Halbierungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte, der von den Seiten gleich weit entfernt ist.

Fig. 51.

Voraussetzung. AD halbiert $\angle A$, CD den $\angle C$, und $DG \perp AB$, $DE \perp AC$, $DF \perp BC$.

Behauptung. DB halbiert $\angle B$, und $DG = DE = DF$.

Beweis. $\triangle DAG \cong DAE$ nach § 50,

$DG = DE$ nach § 45.

Desgl. $\triangle$ DCE $\cong$ DCF,

DE = DF,

drittens DG = DF,

$\triangle$ DBG $\cong$ DBF nach § 58,

$\angle$ DBG = DBF.

5. Von den Vierecken, vorzugsweise von den Parallelogrammen.

§ 70.

Lehrsatz. Die Summe der Winkel eines Vierecks beträgt 4 R.

Behauptung. $\angle$ A + B + C + D = 4 R. Fig. 52.

Beweis. Teilt man das Viereck durch eine Diagonale in zwei reiecke, so ist in jedem derselben die Winkelsumme gleich 2 R, folglich in iden zusammen gleich 4 R.

Zusatz. Ein Viereck kann zwar vier rechte, aber höchstens drei stumpfe, ichstens drei spitze, und nur einen konvexen Winkel enthalten.

§ 71.

Erklärungen. 1) Ein Viereck, dessen gegenüber liegende Seiten parallel id, heißt ein Parallelogramm, z. B. ⧣ AC oder ABCD. Fig. 53.

Es entsteht, wenn zwei Paar Parallelen einander schneiden.

2) Ein Viereck, in welchem nur zwei Seiten parallel sind, heißt ein rapez (Paralleltrapez), z. B. DEFG. Fig. 54.

Sind die nicht parallelen Seiten einander gleich (und demnach gegen e parallelen gleich geneigt), so heißt es ein gerades Trapez oder ntiparallelogramm, z. B. LMNO. Fig. 55.

3) Ein Viereck, in welchem keine Seite einer anderen parallel ist, wird n Trapezoid genannt. Fig. 52.

§ 72.

Lehrsatz. Jedes Parallelogramm wird durch jede der beiden Diago ılen in zwei kongruente Dreiecke geteilt; und es sind in ihm die gegen- ier liegenden Seiten (Gegenseiten) und die gegenüber liegenden Winkel Gegenwinkel) einander gleich.

Voraussetzung. AB ‖ DC und AD ‖ BC. Fig. 53.

Behauptung. Seite AB = DC und AD = BC, $\angle$ A = C und $\angle$ D = B.

Beweis. Zieht man die Diagonale DB, so ist

$\triangle$ ABD $\cong$ BCD nach § 49,

so die homologen Stücke gleich.*)

*) Die Gleichheit der Gegenwinkel folgt auch unmittelbar aus § 32.

Folgerung. Parallelen zwischen Parallelen, folglich auch Senkrechte zwischen Parallelen, sind gleich.

Parallele Linien sind also überall voneinander gleich weit entfernt.

§ 73.

Zusätze. 1) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind es alle.

Fig. 56. Ist $\angle A = R$, so ist es auch C, da er als Gegenwinkel ihm gleich ist; desgleichen $\angle B$ und $D = R$, als Supplemente eines rechten.

2) Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel bekannt ist, so sind es alle.

Fig. 57. 3) Wenn in einem Parallelogramm zwei anstoßende Seiten gleich sind, so sind es alle.

§ 74.

Man teilt demnach die Parallelogramme nach den Winkeln ein in:

rechtwinklige und schiefwinklige,

und nach den Seiten in:

gleichseitige und ungleichseitige

(nämlich diejenigen, in welchen nur die Gegenseiten, nicht auch die anstoßenden Seiten gleich sind).

Es ergeben sich somit vier Arten Parallelogramme, nämlich:

Fig. 58. rechtwinklig-gleichseitige (Quadrate),

Fig. 56. rechtwinklig-ungleichseitige (Rechtecke, Oblongen),

Fig. 57. schiefwinklig-gleichseitige (Rhomben, Rauten)

Fig. 53. und schiefwinklig-ungleichseitige (Rhomboide).

§ 75.

Zusatz. Ein Quadrat ist vollständig bestimmt durch eine Seite, ein Rechteck durch zwei (anstoßende) Seiten, ein Rhombus durch eine Seite und einen Winkel, ein Rhomboid durch zwei (anstoßende) Seiten und einen Winkel.

Welches sind demnach die Bedingungen für die Kongruenz der Parallelogramme?

Aufgabe. Ein Parallelogramm zu zeichnen aus den dasselbe bestimmenden Stücken.

Die Auflösung ist sehr leicht.

§ 76.

Die Umkehrungssätze von § 72 sind:

1) Wenn in einem Viereck die Gegenseiten gleich sind, so sind sie auch parallel; das Viereck ist also ein Parallelogramm.

Fig. 53. **Voraussetzung.** $AB = DC$ und $AD = BC$.

Behauptung. $AB \parallel DC$ und $AD \parallel BC$.

Beweis. Zieht man die Diagonale DB, so ist

$\triangle ABD \cong CDB$ nach § 47,

$\angle o = y$ und $p = x$ nach § 45,

$AD \parallel BC$ und $AB \parallel DC$ nach § 28, 2.

2) Wenn in einem Viereck zwei Gegenseiten gleich und parallel sind, so sind es auch die beiden anderen usw.

Voraussetzung. $AD \parallel$ und $=$ ($\#$) DC.

Behauptung. $AD \# BC$.

Beweis. $\triangle ABD \cong BCD$ nach § 44,

$AD = BC$ und $\angle o = y$,

$AD \parallel BC$ nach § 28, 2.

3) Sind in einem Viereck die Gegenwinkel gleich, so sind die Gegenseiten parallel usw.

Voraussetzung. $\angle A = C$ und $\angle B = D$. Fig. 59.

Behauptung. $AD \parallel BC$ und $AB \parallel DC$.

Beweis. $\angle A + B + C + D = 4R$ nach § 70.

Nun ist $\angle A = C$ und $\angle B = D$ nach Voraussetzung,

$2(A + B) = 4R$,

$\angle A + B = 2R$,

$AD \parallel BC$ nach § 28, 3.

Setzt man $\angle D$ für B, so ist $\angle A + D = 2R$, also $AB \parallel DC$.

§ 77.

Zusatz. Nach § 76, 1 kann man ein Parallelogramm aus den bestimmenden Stücken auch konstruieren, indem man die gegebenen Seiten unter dem gegebenen Winkel aneinander trägt und aus dem Endpunkte jeder von ihnen je mit der anderen einen Kreisbogen beschreibt. Der Durchschnittspunkt dieser Bogen ist der vierte Winkelpunkt.

§ 78.

Lehrsatz. In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander. Auch jede andere durch ihren Durchschnittspunkt gelegte und von den Seiten begrenzte gerade Linie wird in ihm halbiert und halbiert das Parallelogramm.

Voraussetzung. $ABCD$ ein $\#$. Fig. 60.

Behauptung 1. $AE = EC$ und $BE = ED$.

Beweis. $\triangle ABE \cong CDE$ nach § 49,

da $AB = DC$ als Gegenseiten, und die Winkel gleich sind als Wechselwinkel oder Scheitelwinkel, usw.

Behauptung 2. FE = EG.

Beweis. $\triangle$ DEF $\cong$ BEG nach § 49,

FE = EG.

Behauptung 3. Trapez AGFD $\cong$ CFGB, da alle Seiten und Winkel der Reihe nach bezüglich gleich sind.

Erklärung. Der Durchschnittspunkt der Diagonalen heißt der Mittelpunkt des Parallelogramms, die durch ihn den Seiten parallel gelegten Linien heißen die Mittellinien.

§ 79.

Lehrsätze. 1) In den rechtwinkligen Parallelogrammen sind die Diagonalen einander gleich; ihr Mittelpunkt ist demnach von allen Winkelpunkten gleich weit entfernt.

Fig. 61.

Voraussetzung. ABCD ist rechtwinklig.

Behauptung. AC = BD und AE = BE = CE = DE.

Beweis. $\triangle$ ABC $\cong$ ABD nach § 44 usw.

2) In den schiefwinkligen Parallelogrammen sind die Diagonalen ungleich, und zwar ist die die größere, welche den stumpfen Winkeln gegenüber liegt.

Fig. 62.

Voraussetzung. $\angle$ ABC ein stumpfer Winkel.

Behauptung. AC > BD.

Beweis. In den beiden Dreiecken ABD und ABC ist Seite AB = AB, AD = BC als Gegenseiten eines Parallelogramms,

aber $\angle$ DAB < ABC nach Voraussetzung,

Seite BD < AC nach § 46.

§ 80.

Lehrsätze. 1) In den gleichseitigen Parallelogrammen halbieren die Diagonalen die Winkel und schneiden sich rechtwinklig. Ihr Mittelpunkt ist von allen Seiten gleich weit entfernt.

Fig. 57.

Voraussetzung. AB = BC = CD = DA.

Behauptung. $\angle$ o = p, DB $\perp$ AC,

und die Senkrechte EG = EH = EF = EK.

Beweis. $\triangle$ AED $\cong$ AEB nach § 47,

$\angle$ o = p
und $\angle$ AED = AEB } nach § 45,

AE $\perp$ DB.

Ferner ist $\triangle$ AEK $\cong$ AEG nach § 50,

EK = EG.

In derselben Weise ergibt sich auch EK = EF = EH.

2) In den ungleichseitigen Parallelogrammen halbieren die Diagonalen die Winkel nicht und schneiden sich nicht rechtwinklig; ihr Mittelpunkt ist nur von den Gegenseiten gleich weit entfernt.

Voraussetzung. Seite $AB > BC$. Fig. 62.

Behauptung. $\angle o > p$, $\angle AED < AEB$, und die Senkrechte EK ungleich EG.

Beweis. 1) $\angle m > p$ nach § 55,
$\angle m = o$ nach § 27, 2,
auch $\angle o > p$.

2) In den Dreiecken AED und AEB ist
Seite $AE = AE$, $DE = EB$, aber $AD < AB$,
$\angle AED < AEB$ nach § 48.

3) Wäre $EK = EG$, so müßte
$\triangle AEK \cong AEG$ sein nach § 58,
$\angle o = p$, welches gegen Teil 1.

Dagegen ist Senkrechte $EK = EH$ und $EG = EF$, da sie nach § 30, 2 je in eine gerade Linie fallen.

§ 81.

Lehrsatz. Die Mittellinien eines Parallelogramms sind die Diagonalen eines zweiten, welches die Hälfte des ersten ist.

Voraussetzung. FG und HK sind die Mittellinien des ∥ ABCD. Fig. 63.

Behauptung. FHGK ist ein ⧣ und $= \frac{1}{2}$ABCD.

Beweis. 1) $\triangle HEG \cong FEK$ nach § 44,
HG ⧣ FK nach § 45 und 28, 2,
FHGK ein ⧣.

2) $FHGK = \frac{1}{2}$ ABCD, weil $\triangle FEH = \frac{1}{2}$ ⧣ HEFD, $\triangle HEG = \frac{1}{2}$ ⧣ AGEH usw.

Dritter Abschnitt.

Vom Kreise.

§ 82.

Lehrsatz. Kreise von gleichen Halbmessern (desgl. auch von gleichen Durchmessern) sind kongruent — und umgekehrt.

Beweis. Legt man die Kreise mit ihren Mittelpunkten aufeinander, so müssen auch ihre Peripherien ineinander fallen; denn sonst würden sich ungleiche Halbmesser ergeben.

Die Umkehrung ist von selbst einleuchtend.

§ 83.

Lehrsatz. Der Durchmesser teilt sowohl die Fläche, als die Peripherie des Kreises in zwei kongruente Teile, welche *Halbkreise* heißen.

Beweis. Legt man den einen Abschnitt auf den anderen um, daß der Durchmesser sich selbst deckt, so müssen auch die Kreisbogen ineinander fallen, weil sonst ungleiche Halbmesser entstehen würden.

§ 84.

Lehrsatz. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt senkrecht über dem Mittelpunkte jeder Sehne.

Der Beweis ist in § 65 enthalten, wenn man nach den Endpunkten der Sehne Radien zieht.

Anmerkung. Der Satz kann drei verschiedene Formen annehmen, namentlich auch die:

Die Senkrechte aus der Mitte einer Sehne trifft den Mittelpunkt des Kreises.

§ 85.

Fig. 64. **Zusätze.** 1) Wenn man in einem Kreise aus den Mitten zweier nicht parallelen Sehnen Perpendikel errichtet, so ist ihr Durchschnittspunkt der Mittelpunkt des Kreises.

2) Ein Punkt, welcher von drei Punkten der Peripherie gleich weit entfernt ist, ist der Mittelpunkt des Kreises.

Anmerkung. Von jedem anderen Punkte innerhalb oder außerhalb oder in der Peripherie des Kreises sind nicht mehr als je zwei gleiche Linien nach der Peripherie möglich; die übrigen sind größer oder kleiner, die größte ist die, welche durch den Mittelpunkt geht, die kleinste die, welche verlängert durch den Mittelpunkt gehen würde.

§ 86.

Lehrsätze. 1) Gleiche Sehnen eines Kreises sind vom Mittelpunkt gleich weit entfernt.

Fig. 65. **Voraussetzung.** $AB = DE$.

Behauptung. Die Senkrechte $CF = CG$.

Beweis. Zieht man AC und DC, so ist in den Dreiecken ACF und DCG Seite AC = DC als Radien,

AF = DG als Hälften gleicher Ganzen,

und $\angle$ F = G als R,

$\triangle$ ACF $\cong$ DCG,

CF = CG.

2) (Umkehrung.) Sehnen eines Kreises, die vom Mittelpunkt gleich weit entfernt sind, sind einander gleich.

Voraussetzung. Senkrechte CF = CG.

Behauptung. AB = DE.

Beweis. $\triangle$ ACF $\cong$ DCG nach § 58,

AF = DG,

auch die Ganzen gleich, AB = DE.

§ 87.

Lehrsatz. Von zwei ungleichen Sehnen eines Kreises liegt die größere dem Mittelpunkte näher und umgekehrt.

Es seien die Sehnen von einem Punkte der Peripherie so gezogen, daß der Mittelpunkt zwischen ihnen liegt; so ist

Fig. 66.

1) **Voraussetzung.** AB > BD.

Behauptung. Die Senkrechte CE < CF.

Beweis. Zieht man EF, so ist im Dreieck EBF

EB > BF nach Voraussetzung und § 84,

$\angle$ y > x nach § 55,

sein Komplem $\angle$ o < m,

im Dreieck CEF Seite CE < CF nach § 56.

2) **Voraussetzung.** Senkrechte CE < CF.

Behauptung. AB > BD.

Beweis. Im Dreieck CEF ist CE < CF nach Voraussf.,

$\angle$ o < m nach § 55,

sein Komplem. $\angle$ y > x

im Dreieck EBF Seite EB > BF nach § 56,

auch AB > BD.

In beiden Beweisen gilt, was von BD erwiesen wird, auch von jeder anderen der BD gleichen und demnach vom Mittelpunkt gleich weit entfernten Sehne.

Folgerung. Die größte Sehne ist der Durchmesser. (Dies folgt auch aus § 39.)

§ 88.

Lehrsatz. Die Peripherie eines Kreises kann mit einer geraden Linie nicht mehr als zwei Punkte gemein haben, sie nur in zwei Punkten schneiden.

Fig. 67. **Beweis.** Zieht man Radien nach den Durchschnittspunkten A und B und fällt CD ⊥ AB, so ergibt sich die Behauptung aus § 57, 4 in Verbindung mit § 35, Folg. 2.

Folgerung. Drei Punkte, welche in einer geraden Linie liegen, können nicht Punkte der Peripherie eines Kreises sein.

§ 89.

Lehrsatz. Die Senkrechte auf einem Radius, in seinem Endpunkte errichtet, hat mit der Peripherie des Kreises nur einen einzigen Punkt gemein und liegt sonst, wie weit man sie auch verlängern mag, außerhalb des Kreises.

Eine solche Linie heißt eine Tangente (Berührungslinie) und der gemeinschaftliche Punkt der Berührungspunkt.

Fig. 68. **Voraussetzung.** AB ⊥ AC.

Behauptung. AB liegt, Punkt A ausgenommen, außerhalb des Kreises.

Beweis. Alle Linien von C nach AB sind größer als der Radius AC nach § 57, 2. Ihre Endpunkte liegen also außerhalb des Kreises nach § 35, Folg. 2.

Aufgabe. In einem gegebenen Punkte der Peripherie eines Kreises eine Tangente an ihn zu legen.

Die **Auflösung** geht unmittelbar aus dem Lehrsatze hervor.

§ 90.

Die Umkehrungen des vorigen Lehrsatzes sind:

1) Der Radius, nach dem Berührungspunkte einer Tangente gezogen, steht senkrecht auf ihr.

Fig. 68. **Voraussetzung.** DB eine Tangente in A.

Behauptung. Der Radius CA ⊥ DB.

Beweis (indirekt). Wäre nicht CA ⊥ DB, sondern CN, so müßte CN < CA sein, also Punkt N nach § 35, 2 innerhalb des Kreises liegen und soll doch ein Punkt der Tangente sein.

2) Die Senkrechte aus dem Mittelpunkte eines Kreises, auf eine Tangente gefällt, trifft den Berührungspunkt.

Fig. 68. **Voraussetzung.** DB eine Tangente in A.

Behauptung. Eine Senkrechte aus C auf DB trifft A.

Beweis. Träfe sie nicht Punkt A, sondern Punkt N, so würde, wenn man CA zieht, auch CA ⊥ DB sein nach vorigem Satze; dies widerspricht § 57, 1.

3) Die Senkrechte auf einer Tangente, in ihrem Berührungspunkte errichtet, trifft den Mittelpunkt.

Der **Beweis**, ähnlich dem vorigen, führt auf einen Widerspruch gegen § 16, Zusatz 2.

Anmerkung. Der Mittelpunkt eines Kreises liegt also senkrecht über dem Berührungspunkte jeder Tangente.

§ 91.

Lehrsatz. Zu gleichen Sehnen eines Kreises gehören gleiche Zentriwinkel, gleiche Bogen, gleiche Kreisaus- und Abschnitte.

Es seien die Sehnen von einem Punkte der Peripherie gezogen; so ist

Voraussetzung. $AB = BD$. Fig. 69.

Behauptung. $\angle \alpha = \beta$, $\widehat{AB} = \widehat{BD}$ usw.

Beweis. $\triangle BCA \cong BCD$ nach § 47, demnach $\angle \alpha = \beta$.

Verlängert man nun BC bis zur Peripherie und denkt sich Halbkreis BAE auf BDE umgelegt, daß er ihn deckt, so fällt Dreieck BCA auf BCD und Punkt A auf D, also Bogen BA nicht nur längs, sondern auf $\widehat{BD}$ usw.

Zusatz 1. Zu gleichen Zentriwinkeln eines Kreises gehören gleiche Sehnen, gleiche Bogen usw.

Der **Beweis** ist der vorige, nur daß $\triangle BCA \cong BCD$ nach § 44.

Zusatz 2. Zu gleichen Bogen gehören gleiche Sehnen, gleiche Zentriwinkel usw.

Wird ebenfalls durch Aufeinanderlegen bewiesen.

Anmerkung. Alles dieses gilt offenbar auch von kongruenten Kreisen

§ 92.

Lehrsatz. Jeder Zentriwinkel eines Kreises ist doppelt so groß als jeder der Peripheriewinkel, welche auf demselben (oder gleichem) Bogen stehen.

Behauptung. $\angle ACB = 2ADB$. Fig. 70.

Fall 1. Liegt der Mittelpunkt in einem Schenkel des Peripheriewinkels, so ist $\angle ACB = 2ADB$ nach § 53. Fig. 70 a.

Fall 2. Liegt der Mittelpunkt zwischen den Schenkeln des Peripheriewinkels, so ziehe man von D aus den Durchmesser DE. Fig. 70 b.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Dann ist } \angle o = 2x \\ \text{und } \angle p = 2y\end{array}\right\} \text{ nach Fall 1,}$$

$$\angle o + p, \text{ d. i. } ACB = 2x + 2y$$
$$= 2(x + y) = 2ADB.$$

Fall 3. Liegt der Mittelpunkt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels, so ziehe man ebenfalls DE, und es ist Fig. 70 c.

$$\left.\begin{array}{r}\angle ECB = 2\,EDB \\ \text{und } \angle ECA = 2\,EDA\end{array}\right\} \text{ nach Fall 1,}$$

$$\angle ECB - ECA, \text{ d. i. } \angle ACB = 2\,EDB - 2\,EDA$$
$$= 2(EDB - EDA) = 2\,ADB.$$

Was für $\angle ACB$ gilt, das gilt nach § 91, Zus. 2, für alle Zentriwinkel, welche auf einem dem Bogen AB gleichen Bogen stehen.

§ 93.

Zusätze. 1) Alle Peripheriewinkel auf demselben (oder gleichen) Bogen sind gleich.

Denn sie sind alle die Hälften eines und desselben Zentriwinkels (oder gleicher Zentriwinkel).

2) Der Peripheriewinkel auf dem Durchmesser (oder im Halbkreise) ist ein rechter.

Denn der zugehörige Zentriwinkel ist als gestreckter $= 2\,R$.

§ 94.

Lehrsatz. Der von einer Sehne und einer Tangente (im Berührungspunkt) gebildete Winkel (der Abschnittswinkel) ist gleich jedem der Peripheriewinkel im entgegengesetzten Abschnitt.

Fig. 71.

Behauptung. $\angle DAB = E$.

Beweis. Zieht man von A aus den Durchmesser AF und verbindet F mit D, so ist

$$\angle DAB \text{ das Komplem. von } o, \text{ da } AF \perp AB,$$
$$\text{desgl. } \angle F \text{ das Komplem. von } o, \text{ weil } \angle ADF = R,$$
$$\angle DAB = F \text{ und auch } = E \text{ nach § 93, 1.}$$

Ebenso ist auch $\angle DAG = H$ als Supplemente jener Winkel (vergl. § 100), oder weil, wenn man FH zieht, $\angle FAG = FHA$ als R und $\angle FAD = FHD$.

§ 95.

Lehrsätze. 1) Zwei aufeinander senkrechte Durchmesser teilen sowohl die Fläche, als die Peripherie des Kreises in vier kongruente Teile, welche **Quadranten** heißen.

Fig. 72.

Voraussetzung. AB und DE sind Durchmesser, und $AB \perp DE$.

Behauptung. Quadrant $1 \cong 2 \cong 3 \cong 4$.

Beweis. Die Winkel bei C sind als Rechte einander gleich, folglich (nach § 91, Zus. 1) auch die zugehörigen Bogen und Sektoren.

2) (Umkehrung.) Zu einem Quadranten gehört ein rechter Zentriwinkel.

Voraussetzung. $\widehat{AD}$ ein Quadrant, d. h. $= \widehat{DB} = \widehat{BE} = \widehat{AE}$.

Behauptung. $\angle ACD = R$.

Beweis. Verbindet man B und E mit C, so folgt die Behauptung aus § 18, Zus. 2, und § 91, Zus. 2.

§ 96.

Man teilt den Quadranten in 90, die ganze Peripherie also in 360 gleiche Teile, genannt Gradbogen (^{0}), jeden Gradbogen in 60 Minutenbogen ($'$), diesen in 60 Sekundenbogen ($''$), den Sekundenbogen in 60 Tertienbogen ($'''$).

Zieht man die Radien nach den Teilpunkten, so wird der zugehörige rechte Winkel am Mittelpunkt nach § 91, Zus. 2, ebenfalls in 90 gleiche Teile, Gradwinkel (^{0}), jeder von diesen in 60 Minutenwinkel ($'$) usw. geteilt, so daß zu jedem Gradbogen auch ein Gradwinkel usw., und zu einem Bogen von $m^0 n' p''$ auch ein Winkel von $m^0 n' p''$ gehört — und umgekehrt. (Winkel und Bogen von gleicher Benennung.)

Da nun alle rechten Winkel gleich sind, so sind es auch alle Gradwinkel, alle Minutenwinkel usw., desgleichen auch alle Winkel von gleicher Benennung. Der Zentriwinkel wird also bestimmt durch seine Benennung, d. i. zugleich die des zugehörigen Bogens.

Demnach ist der Bogen (seine Benennung) das Maß des zugehörigen Zentriwinkels.

Anmerkung. Ein in der angegebenen Art eingeteilter Halbkreis heißt ein Transporteur. Er dient zur Messung gezeichneter und zur Zeichnung gemessener Winkel.

§ 97.

Erklärungen. 1) Eine geradlinige Figur heißt in einen Kreis beschrieben, wenn ihre Seiten Sehnen des Kreises sind.

(Der Kreis heißt der Figur umschrieben.)

2) Eine geradlinige Figur heißt um einen Kreis beschrieben, wenn ihre Seiten Tangenten des Kreises sind.

(Der Kreis heißt in die Figur beschrieben.)

§ 98.

Lehrsatz. Um jedes Dreieck, ebenso in jedes Dreieck, läßt sich ein Kreis beschreiben.

Der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises ist der Durchschnittspunkt der aus den Mitten der Seiten errichteten Perpendikel (§ 68).

Der Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises ist der Durchschnittspunkt der die Winkel halbierenden Linien (§ 69).

Denn die Seiten stehen senkrecht auf den drei gleichen Linien DE, DF und DG, sind also Tangenten eines Kreises, dessen Radien jene Linien sind. Fig. 51.

§ 99.

Zusatz 1. Aus Teil 1 folgt, daß durch je drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen (also Winkelpunkte eines Dreiecks sein können), sich die Peripherie eines Kreises legen läßt.

Fig. 73. Man hat nämlich die drei Punkte durch zwei Linien zu verbinden und aus ihren Mitten Senkrechte zu errichten; ihr Durchschnittspunkt ist der Mittelpunkt des verlangten Kreises.

Es ergibt sich, welche der Verbindungslinien man auch nehmen möge, nur ein Kreis (§ 68).

Folgerung. Drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen, bestimmen einen Kreis (Lage und Größe) vollständig.

Fig. 80. **Zusatz 2.** Die Peripherien zweier (verschiedenen) Kreise können nicht mehr als zwei Punkte gemein haben.

Erklärung. Zwei Kreise, deren Peripherien zwei Punkte gemein haben, heißen einander schneidende Kreise.

Fig. 81 u. 82. Zwei Kreise, deren Peripherien nur einen Punkt gemein haben, heißen einander berührende Kreise.

(Berührung von innen und von außen.)

§ 100.

Lehrsätze. 1) In jedem Viereck im Kreise (im Sehnenviereck) ist die Summe je zweier Gegenwinkel gleich 2 R.

(Die Summen der Gegenwinkel sind also gleich.)

Fig. 74. **Behauptung.** $\angle DAB + DCB = 2R$.

Beweis. Zieht man die Diagonalen, so ist im Dreieck ABD

$\angle DAB + m + p = 2R$ nach § 40.

Nun ist $\angle m = y$ (auf $\widehat{AB}$)

und $\angle p = x$ (auf $\widehat{AD}$),

$\angle DAB + x + y = 2R$.

d. i. DCB.

2) (Umkehrung.) Wenn in einem Viereck die Summe zweier Gegenwinkel gleich 2 R ist, so läßt sich um dasselbe ein Kreis beschreiben.

Fig. 75. **Voraussetzung.** $\angle A + BCD = 2R$.

Behauptung. Der durch B, A und D gelegte Kreis geht auch durch C.

Beweis. Angenommen, er ginge nicht durch C, so müßte er die Seite DC (oder BC) selbst, oder ihre Verlängerung, etwa in E schneiden, und es würde, wenn man BE zieht,

nach vorigem Lehrsatz $\angle A + BED = 2R$ sein.

Nach Vorauss. aber ist $\angle A + BCD = 2R$;

müßte $\angle BED = BCD$ sein,

was gegen § 42, Folg. streitet.

§ 101.

Lehrsätze. 1) In jedem einem Kreise umschriebenen Viereck (im **Tangentenviereck**) sind die Summen der Gegenseiten gleich.

Voraussetzung. Seite AB, BD, DE, AE sind Tangenten. Fig. 75.

Behauptung. Seite $AB + DE = BD + AE$.

Beweis. Verbindet man den Mittelpunkt mit den Winkelpunkten und den Berührungspunkten,

so ist $\triangle ACF \cong ACK$ nach § 58,

Seite $AF = AK$ nach § 45.

Ebenso ist $\triangle BCF \cong BCG$, also $BF = BG$,

folglich $AF + BF$, d. i. $AB = AK + BG$.

Auf dieselbe Weise ergibt sich $DE = EK + DG$,

also $AB + DE = BD + AE$.

2) (Umkehrung.) Wenn in einem Viereck die Summen der Gegenseiten gleich sind, so läßt sich in dasselbe ein Kreis beschreiben.

Voraussetzung. $AB + DE = BD + AE$. Fig. 77.

Behauptung. Ein Kreis, welcher AE, AB und BD berührt, berührt auch DE.

Beweis. Halbiert man die zwei benachbarten Winkel A und B durch AC und BC und fällt von C auf AE, AB und BD die Senkrechten CK, CF und CG, so sind diese gleich als homologe Stücke in kongruenten Dreiecken. C ist also der Mittelpunkt eines Kreises, der AE in K, AB in F, BD in G berührt. Es wird nun behauptet, daß dieser Kreis auch DE berührt.

Denn angenommen, er berührte sie nicht: so ziehe man von D an ihn eine Tangente, bis sie AE oder deren Verlängerung in L trifft.

Dann wäre

nach vorigem Lehrsatze Seite $AB + DL = BD + AL$;

nach Voraussetzung aber ist $AB + DE = BD + AE$;

müßte $DL - DE = AL - AE$ d. i. $= EL$

sein, und dies widerspricht § 39, Folg. 2.

Anmerkung. Da das Tangentenviereck offenbar keinen konvexen Winkel enthalten kann, wird auch im Umkehrungssatz ein Viereck ohne konvexen Winkel vorausgesetzt.

§ 102.

Zusatz. Um jedes rechtwinklige und in jedes gleichseitige Parallelogramm läßt sich ein Kreis beschreiben.

Der Mittelpunkt des Parallelogramms ist zugleich der Mittelpunkt des Kreises. Dies folgt aus § 79, 1 und 80, 1.

§ 103.

Lehrsatz. Um jedes und in jedes reguläre Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben. Der Mittelpunkt des einen Kreises ist auch der des anderen und heißt der Mittelpunkt des Polygons.

Fig. 78. **Voraussetzung.** Seite $AB = BC = CD$ usw.
und $\angle A = B = C$ usw.

Errichtet man aus den Mitten zweier benachbarten Seiten, aus G und H, die Senkrechten GM und HM, verbindet ihren Durchschnittspunkt (§ 31) mit den Winkelpunkten und fällt aus ihm Senkrechte auf die übrigen Seiten, so ist

Behauptung. $AM = BM = CM$ usw.
Senkrechte $MG = MH = MK$ usw.

Beweis. $\triangle AGM \cong BGM$ und $\triangle BHM \cong CHM$ } nach § 44,

Seite $AM = BM = CM$ nach § 45.

Ferner ist $\triangle ABM \cong CBM$ nach § 47,

$\angle ABM = CBM$, also $= \frac{1}{2} ABC$.

Es ist aber $\angle BCM = CBM$ nach § 51,

auch $\angle BCM = \frac{1}{2} ABC = \frac{1}{2} BCD = MCD$,

$\triangle BCM \cong DCM$ nach § 44,

Seite $DM = BM = CM$.

Auf dieselbe Weise ergibt sich, daß

$\triangle DCM \cong EDM$ usw. nach § 44,

auch Seite $DM = EM = FM$,

desgl. Senkrechte $MG = MH = MK$ usw. als homologe Linien in kongruenten Dreiecken (oder nach § 86).

Anmerkung. Man findet den Mittelpunkt des Polygons auch durch Halbierung zweier benachbarten Polygonwinkel.

§ 104.

Erklärung. Der Radius des um ein reguläres Polygon beschriebenen Kreises heißt der größte Radius, z. B. AM, der des einbeschriebenen Kreises der kleinste Radius des Polygons, z. B. MG.

Das von einer Seite und zwei größten Radien gebildete (gleichschenklige) Dreieck heißt das Bestimmungsdreieck, z. B. ABM, und der Winkel an seiner Spitze der Zentriwinkel des Polygons, z. B. $\angle AMB$.

§ 105.

Lehrsatz. Der Zentriwinkel eines regulären Polygons ist gleich 4 R, dividiert durch die Anzahl der Seiten.

Bedeutet Z_n den Zentriwinkel eines regulären Polygons von n Seiten, so ist $Z_n = \frac{4R}{n}$ oder $\frac{4}{n}R$; denn alle n Zentriwinkel betragen zusammen 4 R nach § 18, Zus. 2, und sind einander gleich nach § 45.

Folgerung 1. $Z_3 = \frac{4}{3}R$, $Z_4 = 1R$, $Z_6 = \frac{2}{3}R$, $Z_{10} = \frac{2}{5}R$, $Z_{15} = \frac{4}{15}R$ usw.

Folgerung 2. Das Bestimmungsdreieck eines regulären Sechsecks ist ein gleichseitiges; die Seite desselben ist gleich seinem größten Radius.

§ 106.

Lehrsatz. In jedem Polygon beträgt die Summe aller Winkel so viel mal 2 R, als das Polygon Seiten hat, weniger 4 R.

Bedeutet $\angle P_n$ die Summe aller Winkel eines Polygons von n Seiten, so ist

Behauptung. $\angle P_n = 2nR - 4R$.

Beweis. Verbindet man einen beliebigen Punkt J innerhalb des Polygons mit allen Winkelpunkten, so entstehen so viel Dreiecke, als das Polygon Seiten hat, im ganzen n Dreiecke; in jedem derselben ist die Summe der Winkel = 2 R, in allen n Dreiecken demnach = 2nR. Davon geht aber die Summe der Winkel um J, gleich 4 R, ab, weil sie nicht zu den Polygonwinkeln gehören; es bleibt also für diese übrig die Summe 2nR — 4R.

Anmerkung. Hat ein Polygon so viele oder so große konvexe Winkel, daß von keinem Punkte aus nach den Winkelpunkten gerade Linien gezogen werden können, welche sämtlich ganz innerhalb des Polygons liegen, so zeige man die Richtigkeit des Satzes, indem man das Polygon durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt.

Zusatz. Der Polygonwinkel eines regulären Polygons ist das Supplement des Zentriwinkels.

Denn jeder Polygonwinkel P_n

ist $= \frac{2nR - 4R}{n} = 2R - \frac{4}{n}R$, d. i. nach § 105 $= 2R - Z_n$.

§ 107.

Lehrsatz 1. Wenn man die Peripherie eines Kreises in gleiche Teile teilt und die zu ihnen gehörigen Sehnen zieht, so bilden dieselben ein reguläres Polygon.

Beweis. Die Seiten und die Winkel des Polygons sind gleich nach § 91, Zus. 2. Fig. 78.

Anmerkung. Aus § 95 ergibt sich, wie man in einen gegebenen Kreis ein reguläres Viereck, aus § 105, Folg. 2, wie man ein reguläres

Sechseck*), und demnach durch fortgesetzte Halbierung der Zentriwinkel ein reguläres 8eck, 16eck, 12eck, 24eck usw. einzeichnet.

Lehrsatz 2. Wenn man durch die Winkelpunkte eines regulären Polygons im Kreise Tangenten legt, so bilden dieselben ein reguläres Polygon um den Kreis.

Fig. 79. **Voraussetzung.** ABCDEF ist regulär, und
OG, GH usw. sind Tangenten in A, B usw.

Behauptung. GHKLNO ist regulär.

Beweis. Verbindet man M mit den Winkelpunkten beider Polygone, so ist im Viereck AGBM, da $\angle$ MAG und MBG nach § 90, 1 rechte Winkel sind,

$$\angle AGB + AMB = 2R;$$

desgleichen ist $\angle$ BHC das Supplement von BMC usw.;
da nun $\angle AMB = BMC$ usw. nach § 105,
so ist auch $\angle AGB = BHC$ usw.
Ferner ist $\triangle AGM \cong BGM$ nach § 58,
Seite $AG = BG$
und $\angle AGM = BGM = \frac{1}{2}AGB$.

Desgleichen sind auch die Winkel H, K, L, N, O halbiert, alle ihre Hälften also einander gleich.

Endlich ist $\triangle AGM \cong AOM$ nach § 50,
Seite $AG = AO$.

Ebenso ist $GB = BH$, mithin $OG = GH = HK$ usw.

Anmerkung. Man erhält das umschriebene Polygon auch, wenn man in den Mitten der zu den Seiten des einbeschriebenen Polygons gehörigen Bogen Tangenten legt.

§ 108.

Erklärung. Die Linie, welche durch die Mittelpunkte zweier Kreise geht, heißt ihre Zentrallinie.

Lehrsatz. Die Zentrallinie zweier einander schneidenden Kreise halbiert die gemeinschaftliche Sehne und steht auf ihr senkrecht.

Fig. 80. **Behauptung.** $CD \perp AB$ und $AE = EB$.

Beweis. Zieht man die Radien nach den Durchschnittspunkten, so folgt die Behauptung aus § 62.

§ 109.

Lehrsatz. Die Zentrallinie zweier einander berührenden Kreise geht durch den Berührungspunkt und steht auf der, beiden Kreisen gemeinschaftlichen, Tangente dieses Punktes senkrecht.

*) Mit dem regulären Sechseck hat man zugleich das reguläre Dreieck.

Fall 1. Die Kreise berühren einander in A von außen. Fig. 81.

Behauptung. CAD ist eine gerade Linie, und folglich die auf CD senkrechte AB die gemeinschaftliche Tangente.

Beweis. Angenommen, es wäre CAD eine gebrochene Linie und CmnD gerade, so müßte CmnD, d. i. $Cm + mn + nD < CA + AD$ sein nach § 12. Es ist aber $Cm = CA$ und $nD = AD$,

schon $Cm + nD = CA + AD$,

$Cm + mn + nD > CA + AD$.

Fall 2. Die Kreise berühren einander in A von innen. Fig. 82.

Behauptung. CDA eine gerade Linie usw.

Beweis. Angenommen, CDA wäre eine gebrochene Linie und CDmn gerade, so würde, wenn man die punktierte gerade Linie CA zieht,

diese $CA < CD + DA$ sein nach § 12,

ferner $CA = CDmn = CD + Dm + mn$ als Radius des Kreises C;

müßte $CD + Dm + mn < CD + DA$ sein

und $Dm + mn < DA$.

Es ist aber $Dm = DA$ als Radius des Kreises D,

also $Dm + mn > DA$.

§ 110.

Wenn zwei Kreise ganz getrennt liegen, so ist die Entfernung ihrer Mittelpunkte größer als die Summe ihrer Radien; berühren sie einander von außen, so ist sie gleich der Summe der Radien; schneiden sie einander, so ist sie kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Radien (§ 39); berühren sie einander von innen, so ist sie gleich der Differenz; liegt ein Kreis ganz innerhalb des anderen, so ist sie kleiner als die Differenz der Radien. Fig. 80.

Dies erhellt aus den entsprechenden Figuren. Auch ist einleuchtend, daß auch die Umkehrung des Satzes richtig ist.

Vierter Abschnitt.

I. Vergleichung des Flächeninhaltes geradliniger Figuren.

§ 111.

Erklärungen. 1) Jede Seite eines Dreiecks kann als seine Grundlinie angesehen werden. Der ihr gegenüber liegende Winkelpunkt heißt alsdann die Spitze und seine Entfernung (§ 57, Zus.) von der Grundlinie (oder deren Verlängerung) die Höhe des Dreiecks.

2) Beim Parallelogramm heißen irgend zwei Gegenseiten, beim Trapez die beiden parallelen Gegenseiten die untere und obere Grundlinie; ihre Entfernung voneinander heißt die Höhe.

Folgerung. 1) Wenn Dreiecke oder Parallelogramme zwischen Parallelen liegen, d. h. wenn ihre Grundlinien in der einen von zwei Parallelen, ihre Spitzen (resp. oberen Grundlinien) in der anderen sich befinden, so haben sie gleiche Höhe.

Dies folgt aus § 72, Folg.

2) (Umkehrung der vorigen.) Dreiecke und Parallelogramme von gleicher Höhe können zwischen Parallelen gelegt werden.

Der Beweis wird indirekt geführt.

§ 112.

Lehrsatz. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich, d. h. sie haben gleichen Flächeninhalt.

Fig. 83. **Beweis.** Es seien die beiden Parallelogramme AD und EH neben einander zwischen die Parallelen CH und AF gelegt, und Seite AB = EF; so ist das Trapez

$$AEGC \cong BFHD,$$

weil alle ihre Seiten und Winkel der Reihe nach bezüglich gleich sind. Zieht man nun von beiden das Trapez BEGD ab, so bleibt $\#\, AD = EH$.

Anmerkung. Legt man die Parallelogramme so zwischen Parallelen, daß ihre unteren Grundlinien einander decken, so entstehen zwei kongruente Dreiecke, welche von der ganzen Figur subtrahiert gleiche Reste ergeben.

Zusatz 1. Das Dreieck ist die Hälfte eines jeden Parallelogramms, welches mit ihm gleiche Grundlinie und Höhe hat.

Denn es ist die Hälfte des Parallelogramms, zu welchem es vervollständigt werden kann (§ 72), und welches nach vorigem Lehrsatze dem anderen Parallelogramm gleich ist.

Zusatz 2. Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe sind einander gleich.

Dies folgt ebenso, wie Zus. 1, aus vorigem Lehrsatz in Verbindung mit § 72.

§ 113.

Lehrsatz. (Umkehrung des vorigen.) Dreiecke, desgleichen auch Parallelogramme, von gleichem Flächeninhalt haben

1) bei gleicher Höhe auch gleiche Grundlinie,

2) bei gleicher Grundlinie auch gleiche Höhe.

Beweis indirekt.

Für Teil 2) denke man sich die Figuren mit ihren Grundlinien auf eine gerade Linie gelegt.

§ 114.

Lehrsatz. Wenn man in einem Parallelogramm durch einen beliebigen Punkt der Diagonale Parallelen zu den Seiten legt, so sind die von der Diagonale nicht geschnittenen Parallelogramme einander gleich. Sie heißen die **Ergänzungsparallelogramme.**

Voraussetzung. $AD \parallel BC$ und $\parallel HK$, Fig. 84.
$AB \parallel DC$ und $\parallel FG$.

Behauptung. $\#\, DE = EB$.

Beweis. $\triangle ADC \cong ABC$,
$\triangle AFE \cong AKE$, nach § 72,
$\triangle EHC \cong EGC$,

$\#\, DE = EB$ nach § 5, Folg. 5.

Zusatz. Ist das gegebene Parallelogramm ein Quadrat, so sind die von der Diagonale geschnittenen Parallelogramme ebenfalls Quadrate und die Ergänzungsparallelogramme kongruente Rechtecke.

Beweis. Da $\#\, DB$ rechtwinklig ist, so sind es auch die anderen nach § 73, Zus. 1. Fig. 85.

Da ferner $AD = DC$ nach Voraussetzung, so ist
$\angle DAC = DCA$ nach § 51.

Es ist aber $\angle DAC$ auch $= HEC$ nach § 27,
drittens $\angle HEC = DCA$,
Seite $HE = HC$ nach § 54,

$\#\, HG$ auch gleichseitig nach § 73, Zus. 3, also ein Quadrat.

Ebenso läßt sich erweisen, daß FK ein Quadrat ist.

Endlich ist Rechteck $DE \cong EB$, weil alle ihre Seiten und Winkel bezüglich gleich sind.

§ 115.

Lehrsatz. Das Quadrat über der Summe zweier Linien ist um das doppelte Rechteck aus beiden größer als die Summe ihrer Quadrate, das Quadrat über der Differenz zweier Linien ist um ebenso viel kleiner.

Bezeichnet man die beiden Linien mit a und b, das aus ihnen gebildete Rechteck mit $a \cdot b$*), demnach ihre Quadrate mit a^2 und b^2, so ist **Behauptung 1.** $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b$.

Sie ergibt sich unmittelbar aus Fig. 85.

Behauptung 2. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$.

---

*) Die Rechtfertigung dieser Bezeichnungsweise ist in § 124, Anmerkung 1 enthalten.

Fig. 86. **Beweis.** Ist $AB = a$, $AC = b$, also $CB = a - b$, so ist $EB = a^2$, $GK = (a - b)^2$ und $HC = b^2$. Trägt man nun dieses b^2 zwischen denselben Parallelen an a^2 auf der entgegengesetzten Seite an, so ist

$$GK = EB + BL - EC - CL,$$

d. i. $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b$.

§ 116.

Der Pythagoreische Lehrsatz. Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Fig. 87. **Voraussetzung.** $\angle ACB = R$.

Behauptung. $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Beweis. Konstruiert man die drei Quadrate CD, AF und CG, verbindet dann B mit D, A mit G, und C mit E und F, und fällt aus C auf EF die Senkrechte CH, so ist in den Dreiecken CAE und DAB

Seite $CA = DA$,
Seite $AE = AB$, } als Seiten eines Quadrats,
und $\angle CAE = DAB$, weil beide $= R + CAB$ sind,

$\triangle CAE \cong DAB$.

Es ist aber $\triangle CAE = \frac{1}{2}AH$
und $\triangle DAB = \frac{1}{2}DC$ } nach § 112, Zus. 1,

$\frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}DC$ und $AH = DC$.

Ebenso läßt sich dartun, daß $HB = CG$; folglich ist $AH + HB$,

d. i. $AF = DC + CG$

oder $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.

Zusatz. Das Quadrat über einer Kathete ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse, vermindert um das Quadrat der anderen Kathete.

§ 117.

Lehrsatz. (Umkehrung des vorigen.) Wenn in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen ist, so ist der Gegenwinkel jener Seite ein rechter.

Fig. 88. **Voraussetzung.** $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$.

Behauptung. $\angle ABC = R$.

Beweis. Setzt man AB an BC in B rechtwinklig an, daß sie $= BD$, und zieht CD, so ist

$\overline{CD}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{BC}^2$ nach § 116.

Nach Voraussetzung ist aber $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$,

drittens $\overline{CD}^2 = \overline{AC}^2$,

auch Seite $CD = AC$ (sonst könnten die Quadrate nicht $=$ sein).

Außerdem ist Seite $BD = AB$
und $CB = CB$,

$\triangle CBD \cong ABC$,

$\angle CBD = ABC$.

Da nun $\angle CBD = R$, so ist auch $\angle ABC = R$.

§ 118.

Erklärung. Eine gerade Linie auf eine andere **projizieren** heißt: aus ihren Endpunkten auf die andere (oder deren Verlängerung) Perpendikel fällen. Unter der **Projektion** einer geraden Linie auf eine andere versteht man demnach den Teil der letzteren, welcher durch Perpendikel aus den Endpunkten der ersteren auf ihr abgeschnitten wird.

So ist z. B. pr die Projektion von AB auf MN. Fig. 89, a u. b.

Anmerkung. Die Größe der Projektion hängt von der Größe der zu projizierenden Linie und ihrer Neigung gegen die andere ab; sie ist = null, wenn beide Linien gegeneinander senkrecht sind.

§ 119.

Lehrsatz. 1) Im **stumpfwinkligen** Dreieck ist das Quadrat der **größten** Seite größer als die Summe der Quadrate der beiden anderen Seiten um das doppelte Rechteck aus der einen dieser beiden Seiten und der Projektion der anderen auf sie; 2) in **jedem** Dreieck ist das Quadrat einer Seite, die einem **spitzen** Winkel gegenüber liegt, um ebenso viel kleiner.

Voraussetzung 1. $\angle ABC$ ein stumpfer und $CD \perp AB$. Fig. 90.

Behauptung 1. $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BD$.

Beweis. $AC^2 = AD^2 + DC^2$ nach § 116.

Es ist aber $AD^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,AB \cdot BD$ nach § 115
und $DC^2 = BC^2 - BD^2$ nach § 116, Zus.,

wenn man einträgt, $AC^2 = AB^2 + BD^2 + 2\,AB \cdot BD + BC^2 - BD^2$,
d. i. $= AB^2 + BC^2 + 2\,AB \cdot BD$.

Voraussetzung 2. $\angle ABC$ ein spitzer und $CD \perp AB$. Fig. 91.

Behauptung 2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BD$.

Beweis. $AC^2 = AD^2 + DC^2$,

ferner AD^2, d. i. $(AB - DB)^2 = AB^2 + DB^2 - 2\,AB \cdot DB$
und $DC^2 = BC^2 - DB^2$,

$AC^2 = AB^2 + DB^2 - 2\,AB \cdot DB + BC^2 - DB^2$, d. i.
$= AB^2 + BC^2 - 2\,AB \cdot BD$.

Anmerkung. In diesem Satz ist der Pythagoreische Lehrsatz als ein besonderer Fall mit enthalten. Er heißt deshalb auch der allgemeine Pythagoras.

§ 120.

Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe der Quadrate irgend zweier Seiten gleich der Summe aus dem doppelten Quadrate der halben dritten Seite und dem doppelten Quadrate der Transversale nach ihr.

Fig. 92. **Voraussetzung.** $AD = DB$.

Behauptung. $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{CD}^2$.

Beweis. Projiziert man CD auf AB, so ist

$$\left.\begin{aligned} \overline{AC}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + 2\,AD \cdot DE \\ \text{und } \overline{BC}^2 &= \overline{DB}^2 + \overline{DC}^2 - 2\,DB \cdot DE \end{aligned}\right\} \text{nach § 119,}$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 2\overline{AD}^2 + 2\overline{DC}^2,$$

da $2\,AD \cdot DE$ und $-\;2\,DB \cdot DE$ einander aufheben.

2. Verwandlung geradliniger Figuren.

§ 121.

Erklärung. Eine Figur verwandeln heißt: ihren Flächeninhalt in anderer Gestalt darstellen.

Aufgaben.

1) Ein ungleichseitiges Dreieck ABC in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Fig. 93. **Auflösung.** Man errichte aus der Mitte D von AB eine Senkrechte, bis sie eine aus C zu AB gelegte Parallele in E trifft, und verbinde E mit A und B; so ist ABE das verlangte Dreieck.

Beruht auf § 112, Zus. 2, und § 65, 4.

2) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, das einen gegebenen Winkel α enthält.

Fig. 94. **Auflösung.** Man trage $\angle \alpha$ an AB in A an, verlängere den freien Schenkel, bis er eine aus C zu AB gezogene Parallele in D trifft, und verbinde D mit B; so ist ABD das verlangte Dreieck nach § 112, Zus. 2.

3) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie a hat.

Fig. 95. **Auflösung.** Man trage a auf AB auf, bis D, verbinde die freien Punkte, C und D, ziehe zur Verbindungslinie CD aus B eine Parallele bis zur Gegenseite oder deren Verlängerung, bis E, und verbinde E mit D; so ist ADE das verlangte Dreieck.

Beweis. $\triangle ADE = ABC$, weil sie das Dreieck ABE gemein haben, und $\triangle BED = BEC$ nach § 112, Zus. 2 ist.

Anmerkung. In der Auflösung ist auch der Fall berücksichtigt, daß $a < AB$ ist.

4) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Höhe h hat.

Auflösung. Man errichte $h \perp AB$, lege aus ihrem Endpunkte zu AB eine Parallele, bis sie AC (oder BC) selbst oder deren Verlängerung in D trifft, ziehe DB und aus C zu DB eine Parallele bis zu AB oder deren Verlängerung. Verbindet man noch E mit D, so ist ADE das verlangte Dreieck. Fig. 96.

Beweis wie für die vorige Auflösung.

Anmerkung 1. Man kann hiernach Dreiecke von verschiedener Höhe auf gleiche Höhe bringen, mithin auch ihre Summe oder ihre Differenz als Dreieck darstellen.

Anmerkung 2. Die Aufgaben 3 und 4 lassen sich noch mit 1 und 2 kombinieren.

5) Ein gegebenes Dreieck ABC in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Auflösung. Man ziehe aus D, der Mitte der einen Seite AB, eine Parallele zur anstoßenden AC, und aus C zu AB eine Parallele CE. Fig. 97.

Beruht auf Kongruenz der Dreiecke DBF und ECF, oder auch, wenn man Dreieck ABC zu # AG vervollständigt, auf § 112.

6) Ein gegebenes Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel enthält.

Die Auflösung ist ähnlich der von Aufgabe 2.

7) Ein gegebenes Parallelogramm AC in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Seite a hat.

Auflösung 1. Man ziehe eine Diagonale, verwandle eins der entstandenen Dreiecke nach Aufgabe 3 und vervollständige das erhaltene Dreieck zu einem Parallelogramm.

Auflösung 2. Man trage a an DC an, bis E, ziehe EB, verlängere sie, bis sie die Verlängerung von DA in F trifft, lege $FG \parallel DE$ und $EG \parallel DF$, verlängere endlich AB und CB; so ist BG das verlangte Parallelogramm nach § 114. Fig. 98.

Auflösung 3. Will man Raum ersparen, so verfahre man wie in Fig. 99.

Anmerkung. Die Aufgaben 5 und 7 lassen sich noch mit Aufgabe 6 kombinieren.

8) Ein Parallelogramm, desgleichen ein Trapez, in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Man verlängere die eine Grundlinie um die andere und verbinde den Endpunkt mit dem entfernteren Winkelpunkte der Figur.

Beruht auf Kongruenz der entstehenden Scheiteldreiecke.

9) Ein Trapez ABCD in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Fig. 100. **Auflösung 1.** Man ziehe durch die Mitte E von CB zu AD eine Parallele, bis sie AB und die Verlängerung von DC trifft; so ist

$$\# AG = ABCD, \text{ weil } \triangle CEG \cong BEF.$$

Fig. 101. **Auflösung 2.** Man verlängere DC, bis sie = AB wird, ziehe EB, halbiere CE in F, trage EF auf BA ab, = BG, und verbinde G mit F.

Beweis. Man zeige, daß $FG \parallel EB$, also $\parallel DA$ ist, usw. wie bei Auflösung 1.

Anmerkung. Bei dieser Auflösung entgeht man der Unbequemlichkeit, eine Parallele legen zu müssen.

10) Ein Polygon ABCDE in ein Dreieck zu verwandeln.

Fig. 102. **Auflösung.** Man schneide durch eine Diagonale AD ein Dreieck ADE ab, lege zur Diagonale von der Spitze E des Dreiecks eine Parallele, bis sie die Verlängerung der einen anstoßenden Seite CD in F trifft, und verbinde A mit F; so ist das Fünfeck ABCDE in das Viereck ABCF verwandelt: denn sie bestehen aus gleichen Teilen.

In derselben Weise verwandelt man das Viereck ABCF in ein Dreieck.

11) Ein Rechteck AC in ein Quadrat zu verwandeln.

Fig. 103. **Auflösung.** Man verlängere AB, bis sie = AD wird, beschreibe über AE als Durchmesser einen Kreis, welcher BC in F und ihre Verlängerung in G schneidet, ziehe AG (oder AF); so ist diese die Seite des verlangten Quadrats nach Teil 1 des Beweises zu § 116.

Man ziehe nämlich noch GE und vervollständige das Quadrat DE.

Anmerkung. Es lassen sich also alle geradlinigen Figuren zunächst in ein Dreieck, dann in ein Rechteck, endlich in ein Quadrat verwandeln.

12) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe zweier gegebenen Quadrate ist.

Auflösung. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten gleich den Seiten der beiden Quadrate sind; dann ist die Hypotenuse die Seite des verlangten Quadrates.

Anmerkung 1. Sind mehrere Quadrate in ein Quadrat zu vereinigen, so vereinige man zuerst zwei, das gefundene mit dem dritten usw.

Anmerkung 2. Das Doppelte eines Quadrats ist das Quadrat über seiner Diagonale; das Vierfache ist das Quadrat über der doppelten Seite.

13) Ein Quadrat zu zeichnen, das gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate ist.

Auflösung. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse gleich der Seite des größeren, dessen eine Kathete gleich der Seite des kleineren Quadrates ist. (Zwei Methoden.)

3. Teilung geradliniger Figuren.

Aufgaben.

§ 122.

1) Eine gegebene gerade Linie AB in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Auflösung. Man setze in A unter beliebigem Winkel eine beliebige gerade Linie an, trage auf ihr eine Linie so oft mal ab, als Teile verlangt werden, verbinde den Endpunkt G mit B und ziehe aus den anderen Punkten zu GB die Parallelen $F\varphi$, $E\eta$, $D\delta$, $C\gamma$, und des Beweises wegen noch Parallelen zu AB, immer bis zur nächsten der vorigen Parallelen; so ist $A\gamma = \gamma\delta = \delta\eta$ usw. Fig. 104.

Beweis. $\triangle AC\gamma \cong CDH \cong DEK$ usw. nach § 49,

$A\gamma = CH = DK$ usw.,

auch $A\gamma = \gamma\delta = \delta\eta$ usw. nach § 72.

2) Ein gegebenes Dreieck in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Auflösung. Man teile eine Seite desselben, wie verlangt wird, und verbinde die freien Punkte.

Beruht auf § 112, Zus. 2.

3) Ein gegebenes Parallelogramm in eine beliebige Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Auflösung. Man teile zwei Gegenseiten in die verlangte Zahl gleicher Teile und verbinde die entsprechenden Teilpunkte.

Beruht auf § 76, 2, und § 112.

4) Ein Trapez in gleiche Teile zu teilen.

Auflösung. Man teile die beiden parallelen Gegenseiten, wie verlangt, und verfahre wie in Aufgabe 3.

Beweis. Zieht man die Diagonalen der einzelnen Trapeze, so sind ihre Bestandteile bezüglich gleich nach § 112, Zus. 2, mithin die Trapeze selbst gleich.

5) Ein gegebenes Parallelogramm von einem Winkelpunkte aus in gleiche Teile zu teilen:

α) in eine gerade Anzahl.

Auflösung. Man teile jede der beiden Gegenseiten des Punktes in halb so viele gleiche Teile, als verlangt werden, und verbinde den gegebenen Punkt mit allen Teilpunkten (inklusive des dem gegebenen gegenüber liegenden Winkelpunktes).

Sie ergibt sich aus § 72 und § 112, Zus. 2.

β) in eine ungerade Anzahl.

Auflösung. Man teile jede der beiden Gegenseiten des Punktes in so viel gleiche Teile, als verlangt werden, und verbinde den gegebenen Punkt mit allen Teilpunkten, mit Übergehung des ersten, dritten usw.

Behufs des Beweises ziehe man noch die fehlenden Verbindungslinien.

6) Ein beliebiges Viereck ABCD von einem Winkelpunkte D aus in eine beliebige Anzahl (etwa 5) gleicher Teile zu teilen.

Fig. 105. **Auflösung.** Man verwandle ABCD nach § 121, 10 in ein Dreieck AED, welches D zur Spitze hat, teile AE in fünf gleiche Teile, verbinde D mit F, G und H, ziehe $HL \parallel BD$, verbinde D mit L und halbiere $\triangle DLC$ von D aus nach Aufgabe 2.

Dann ist $\triangle AFD = FGD = GHD = \frac{1}{5} AED = \frac{1}{5} ABCD$; ferner $\triangle GHD =$ Viereck GBLD, weil sie Dreieck GBD gemein haben, und $\triangle DBH = DBL$ ist. Das Viereck ABLD ist also $= \frac{3}{5} ABCD$, mithin $\triangle DLC = \frac{2}{5} ABCD$.

Anmerkung 1. Ist der Winkel CDA ein gestreckter, so lautet die **Aufgabe:**

Ein Dreieck von einem Punkte einer Seite aus in eine beliebige Zahl gleicher Teile zu teilen.

Anmerkung 2. Auf ähnliche Art löst man die Aufgabe:
Ein Dreieck von einem Punkte innerhalb in gleiche Teile zu teilen.

4. Ausmessung geradliniger Figuren.

§ 123.

Erklärung 1. Eine Größe, welche in einer anderen ihr gleichartigen ein oder mehrere Mal genau enthalten ist, heißt ein *Maß* dieser Größe.

Im *weiteren Sinne* des Wortes versteht man unter Maß einer Größe auch jede zweite willkürlich angenommene bekannte Größe, durch welche die erstere in Zahlen (*numerisch*) bestimmt wird.

Erklärung 2. Eine Größe *messen* heißt demnach überhaupt: sie mit einer anderen ihr gleichartigen, als bekannt angenommenen Größe vergleichen und untersuchen, wie oft diese letztere, oder ein wenn auch noch so kleiner genauer Teil von ihr, in der ersteren enthalten ist.

Jede solche Beziehung zweier Größen aufeinander nennt man ihr *geometrisches Verhältnis*, und die Zahlen, welche angeben, wie oft das gemeinschaftliche Maß in der einen und in der anderen enthalten ist, die *Verhältniszahlen*.

Folgerung. Linien werden durch Linien, Winkel durch Winkel, Flächen durch Flächen gemessen.

Anmerkung 1. Als Einheit des Längenmaßes dient das Meter oder der Stab (m = 3,1862 pr. F.); dasselbe wird nach der Einteilungszahl 10 in Dezimeter*) (dm), Zentimeter oder Neuzoll (cm) und Millimeter oder Strich (mm) geteilt. Es ist also 1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm.

Für Bezeichnung der höheren Einheiten bedient man sich der griechischen Zahlwörter; man erhält somit das Dekameter (= 10 m) oder die Kette, das Hektometer*) (= 100 m) und das Kilometer (km = 1000 m).

Anmerkung 2. Zur Ausmessung von Flächen nimmt man Quadrate, deren Seiten eine Einheit des Längenmaßes sind, und bezeichnet sie nach der Länge ihrer Seiten mit: Quadratmeter (qm), Quadratdezimeter*) (qdm) usw., Quadratdekameter (Ar), Quadrathektometer (Hektar) usw.

Als Wegemaß dient das Kilometer; die frühere Rechnung nach Meilen (zu 7500 Metern) ist jedoch noch vielfach in Gebrauch.

§ 124.

Lehrsatz. Wenn man für die Winkelseiten eines Rechtecks ein gemeinschaftliches Maß (im engeren Sinne)**) sucht und auf ihnen aufträgt, dann aus den Teilpunkten Parallelen zu den Seiten zieht, so wird das Rechteck in so viel Quadrate jenes Maßes geteilt, als das Produkt der Verhältniszahlen angibt.

Beweis. Es sei α das gemeinschaftliche Maß und in AB m mal, in AD n mal enthalten; so wird AC durch die Parallelen aus den Teilpunkten der AB in m kongruente Rechtecke, und jedes derselben durch die Parallelen aus den Teilpunkten der DA in n Quadrate des Maßes α, das ganze Rechteck also in mn Quadrate von α zerlegt. Fig. 106.

Es ist demnach AC = mn Quadraten von α; z. B. es sei α = 1 Meter, m = 7, n = 4; so ist das Rechteck AC = 28 Quadratmeter (28 qm).

Anmerkung 1. Man pflegt diesen Satz kurz so auszudrücken:

Den Flächeninhalt eines Rechtecks findet man, wenn man zwei Winkelseiten desselben mit einerlei Maße mißt und multipliziert.

Denn multipliziert man $AB = m \cdot \alpha$

mit $AD = n \cdot \alpha$,

so erhält man $AB \cdot AD = mn \cdot \alpha^2$, also ebenfalls mn Quadrate von α. Mithin ist Oblongum $AC = AB \cdot AD$.

*) Die mit einem Sternchen bezeichneten Maße sind in der für das Deutsche Reich erlassenen Maß- und Gewichts-Ordnung nicht aufgeführt, weil man meinte, daß sie für den praktischen Gebrauch entbehrlich seien. Von seiten der Wissenschaft ist kein Grund vorhanden sie auszuschließen.

**) Man findet das größte gemeinschaftliche Maß für zwei Linien ebenso wie für ganze Zahlen. Die Division der Zahlen durcheinander wird zur Abtragung der Linien aufeinander.

Anmerkung 2. Ergibt sich für die Winkelseiten kein gemeinschaftliches Maß, d. h. sind die Winkelseiten inkommensurabel, so läßt sich doch für dieses ihr irrationales Verhältnis immer ein rationales auffinden, welches ihm so nahe gebracht werden kann, daß man das eine für das andere setzen darf*).

---

*) Will man die Berechnung eines Rechtecks im Fall der Inkommensurabilität seiner Winkelseiten etwas strenger begründen, so tut man wohl, die Sätze in § 124 und 125 folgendermaßen zu ordnen und auszudrücken:

§ 124.

Lehrsatz. Wenn die Winkelseiten eines Rechtecks ein gemeinschaftliches Maß (im engeren Sinne) haben, so ist der Flächeninhalt des Rechtecks gleich so vielen Quadraten jenes Maßes, als das Produkt der Verhältniszahlen angibt.

Beweis. Es sei α das gemeinschaftliche Maß und in AB m mal, in AD n mal enthalten; so trage man α auf zwei Winkelseiten (resp. m und n mal) auf und ziehe aus den Teilpunkten Parallelen zu den Seiten. Dann wird AC durch die Parallelen usw. wie im Texte.

Anmerkung. Man pflegt diesen Satz kurz so auszudrücken:

Den Flächeninhalt eines Rechtecks (dessen Winkelseiten ein gemeinschaftliches Maß haben) findet man, indem man zwei Winkelseiten mit dem gemeinschaftlichen Maße mißt und multipliziert.

Dazu der Grund wie im Texte.

§ 125.

Zusatz 1 und 2 wie im Texte.

Anmerkung. Haben die Winkelseiten eines Rechtecks kein gemeinschaftliches Maß, d. h. sind sie inkommensurabel, ist ihr Verhältnis irrational, so ist auch der Flächeninhalt des Rechtecks irrational, d. h. in endlicher Form durch die 4 Spezies nicht genau angebbar. Es läßt sich aber zeigen, daß derselbe stets zwischen zwei Grenzwerten liegen muß, welche man nach der Regel in § 124, Anmerk., berechnen und einander so nahe bringen kann, daß sie mit dem von ihnen begrenzten Flächeninhalt zusammenfallen.

(**Beweis.**) Wenn man nämlich in Fig. 106 Seite AD in n gleiche Teile α teilt, dieselben auf AB aufträgt, so daß AB $> m\alpha$ und $< (m+1)\alpha$ wird, und aus den Endpunkten von $m\alpha$ und $(m+1)\alpha$ Parallelen zu AD zieht, bis sie DC und deren Verlängerung treffen, dann ist nach dem Lehrsatz in § 124

$$AC > nm\alpha^2 \text{ und } < n(m+1)\alpha^2, \text{ d. i. } nm\alpha^2 + n\alpha^2,$$

die Differenz dieser Grenzwerte also $= n\alpha^2$.

Nimmt man aber als Maß $\frac{1}{2}\alpha$ statt α, so ist

$$AD = 2n\frac{\alpha}{2}, \text{ d. i. } = n\alpha; \text{ AB aber kann}$$

entweder $> 2m \cdot \frac{\alpha}{2}$, d. i. $m\alpha$ und $< (2m+1)\frac{\alpha}{2}$, d. i. $\frac{(2m+1)}{2}\alpha$,

oder $> (2m+1)\frac{\alpha}{2}$, d. i. $\frac{(2m+1)}{2}\alpha$ und $< (2m+2)\frac{\alpha}{2}$, d. i. $(m+1)\alpha$ sein.

§ 125.

Zusatz 1. Ist MNPQ ein Quadratmeter, d. h. Fig. 58.

$$MN = MQ = 1 \text{ m} = 10 \text{ dm},$$

so ist offenbar nach § 124

$$MP = 100 \text{ qdm, desgl. } 1 \text{ qdm} = 100 \text{ qcm usw.}$$

Die Einteilungszahl des Flächenmaßes ist also 100.

Zugleich folgt, daß 1 qdm, d. i. $\left(\frac{1}{10}\text{ m}\right)^2 = \frac{1}{100}$ qm und allgemein $\left(\frac{1}{n}\text{ m}\right)^2 = \frac{1}{n \cdot n}$ qm ist.

Zusatz 2. Sind die beiden Winkelseiten eines Rechtecks mit einem willkürlichen Maße gemessen, d. h. sind die Verhältniszahlen Brüche, so kann man durch Gleichnamigmachung derselben ein gemeinschaftliches Maß finden, dessen zugehörige Verhältniszahlen multipliziert und mit der zukommenden Benennung versehen ein Resultat ergeben, welches man kürzer durch Multiplikation der ursprünglichen Data erhalten kann.

Z. B. Ist $AB = 5\frac{2}{3}$ m, $AD = 3\frac{1}{2}$ m, also Fig. 58.

$$AB = \tfrac{34}{6} \text{ m} = 34 \cdot \tfrac{1}{6} \text{ m und } AD = 21 \cdot \tfrac{1}{6} \text{ m},$$

so ist $\frac{1}{6}$ m das gemeinschaftliche Maß,

$$\text{mithin } AC = 34 \cdot 21 \cdot \left(\tfrac{1}{6}\text{ m}\right)^2, \text{ d. i. nach Zus. 1}$$
$$= 34 \cdot 21 \cdot \tfrac{1}{6 \cdot 6} \text{ qm} = \tfrac{34}{6} \cdot \tfrac{21}{6} \text{ qm}$$
$$= \tfrac{17}{3} \text{ m} \cdot \tfrac{7}{2} \text{ m}.$$

Auch für diesen Fall bleibt also die in § 124, Anmerk. 1, angegebene Regel richtig, und es ist allgemein, wenn a und b die Winkelseiten eines Oblongum sind, Oblong. $= a \cdot b$,

$$\text{demnach } a = \frac{\text{Obl.}}{b} \text{ und } b = \frac{\text{Obl.}}{a}.$$

Folgerung. Bedeutet a die Seite, F den Flächeninhalt eines Quadrats, so ist $F = a^2$ und $a = \sqrt{F}$.

Im ersten Fall ist nach Zus. 2

$$AC > nm\alpha^2 \text{ und } < \frac{n(2m+1)}{2}\alpha^2, \text{ d. i. } nm\alpha^2 + \frac{n}{2}\alpha^2;$$

im zweiten Fall ist $AC > nm\alpha^2 + \frac{n}{2}\alpha^2$ und $< nm\alpha^2 + n\alpha^2$;

in beiden Fällen ist also die Differenz der Grenzwerte $= \frac{n}{2}\alpha^2$, und sie wird, wenn man das Verfahren bis ins Unendliche wiederholt denkt, verschwindend klein. Alsdann fallen die Grenzwerte, für welche der Lehrsatz bereits erwiesen ist, mit dem von ihnen begrenzten Wert von AC zusammen.

Es bleibt also auch unter den in Zusatz 2 und Anmerk. angegebenen Voraussetzungen die in § 124, Anmerk., aufgestellte Regel richtig, und es ist allgemein, wenn a und b die Winkelseiten eines Oblongum bedeuten, Oblong. $= a \cdot b$,

§ 126.

Lehrsätze. 1) Der Flächeninhalt irgend eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie (g) und der Höhe (h).

$$\text{Parallelogramm} = g \cdot h.$$

Denn jedes schiefe Parallelogramm ist nach § 112 gleich einem Rechteck, dessen Winkelseiten die Grundlinie und Höhe des ersten sind.

Demnach ist $g = \frac{\text{Prllg.}}{h}$ und $h = \frac{\text{Prllg.}}{g}$.

2) Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkte aus der Grundlinie in die Höhe.

$\text{Dreieck} = \frac{g \cdot h}{2}$, mithin $g = \frac{2\ \text{Dr.}}{h}$ und $h = \frac{2\ \text{Dr.}}{g}$.

Dies folgt aus § 112, Zusatz 1.

Zusatz. Der Flächeninhalt (F) eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind, ist gleich dem halben Produkte der beiden Katheten. $F = \frac{a \cdot b}{2}$.

3) Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkte aus der halben Summe seiner Grundlinien (G und g) und seiner Höhe (h).

$$\text{Trapez} = \frac{G + g}{2} \cdot h \text{ oder } \frac{(G + g)h}{2}.$$

Beweis. Zieht man eine Diagonale, so ist

$$\text{Trapez} = G \cdot \frac{h}{2} + g \cdot \frac{h}{2}, \text{ d. i.} = (G + g) \cdot \frac{h}{2} = \frac{(G + g)h}{2}.$$

Folglich ist $h = \frac{2\ \text{Trap.}}{G + g}$ und $G = \frac{2\ \text{Trap.}}{h} - g$.

4) Der Flächeninhalt (F) eines regulären Polygons ist gleich dem halben Produkte aus seinem Umfang (U) in seinen kleinsten Radius (ϱ).

$$F = \frac{U \cdot \varrho}{2}.$$

Beweis. Bedeutet S die Seite des Polygons und n die Seitenzahl, so ist

$$F = \frac{n \cdot S \cdot \varrho}{2}, \text{ d. i. } \frac{U \cdot \varrho}{2}.$$

Anmerkung. In betreff aller dieser Inhaltsbestimmungen ist nochmals darauf aufmerksam zu machen, daß man immer *nur die Verhältniszahlen* der mit einerlei Maße gemessenen Linien zu *multiplizieren* und dem Produkte die dem Längenmaß entsprechende Flächenmaßeinheit als Benennung hinzuzufügen hat.

§ 127.

Folgerungen. 1) Die Flächen zweier Dreiecke verhalten sich wie die Produkte aus ihren Grundlinien in ihre Höhen.

2) Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien.

3) Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen.

4) Dreiecke, in welchen ein Winkel bezüglich gleich ist, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Denn denkt man sich die Dreiecke, deren Flächen F und F_1 sein mögen, so aneinander gelegt, daß die beiden gleichen Winkel Scheitelwinkel bilden, und fügt man durch Verbindung zweier Winkelpunkte das Zwischendreieck (f) hinzu, so ergeben sich nach Folg. 2 die Verhältnisse $F:f$ und $f:F_1$, aus deren Zusammensetzung die Richtigkeit des Satzes hervorgeht.

5) Dreiecke sind gleich, wenn ihre Grundlinien sich umgekehrt wie ihre Höhen verhalten — und umgekehrt: In gleichen Dreiecken verhalten sich die Grundlinien umgekehrt wie ihre Höhen.

Alle diese Sätze gelten auch für Parallelogramme.

Fünfter Abschnitt.

Von der Proportionalität gerader Linien und der Ähnlichkeit geradliniger Figuren.

§ 128.

Lehrsatz. Wenn in einem Dreieck zu einer Seite eine Parallele gezogen wird, so teilt sie die beiden anderen Seiten in proportionale Teile.

Voraussetzung. $DE \parallel AB$. Fig. 107.

Behauptung. $AD:DC = BE:EC$.

Beweis. Sucht man für AD und DC das größte gemeinschaftliche Maß (α), welches in AD m mal, in DC n mal enthalten sein möge, trägt es dann auf AD und DC auf und zieht aus den Teilpunkten Parallelen zu AB, so wird durch diese nach § 122, 1 BE in m und EC in n gleiche Teile (β) geteilt, und es ist

$$AD:DC = m\alpha : n\alpha = m:n$$
$$\text{und } BE:EC = m\beta : n\beta = m:n,$$
$$\text{drittens } AD:DC = BE:EC.$$

Anmerkung 1. Für den Fall der Inkommensurabilität von AD und DC siehe § 124, Anmerk. 2.

Anmerkung 2. Um diese wichtige Frage, welche in der hier auftretenden Form sehr oft wiederkehrt, ein für allemal etwas gründlicher zu erledigen, zeige man, daß die beiden irrationalen Verhältnisse, welche gleich sein sollen, immer zwischen denselben rationalen Grenzen liegen müssen, und daß diese

rationalen Grenzverhältnisse einander immer näher, endlich so nahe gebracht werden können, daß sie miteinander, und um so mehr mit den von ihnen begrenzten irrationalen Verhältnissen zusammenfallen.

Dieses beweist man wie folgt:

Fig. 108. Teilt man CD in n gleiche Teile α und trägt α auf DA mmal auf, bis ein Rest FA $< \alpha$ bleibt; dann ist DA $>$ DF oder mα und $<$ DG oder $(m + 1)\alpha$. CD : DA liegt also zwischen n : m und n : m + 1, sein Exponent zwischen $\frac{m}{n}$ und $\frac{m+1}{n}$.

Zieht man nun aus den Teilpunkten der CG Parallelen zu AB, so ist CE $= n\beta$, EH $= m\beta$ und EK $= (m + 1)\beta$; also liegt auch

CE : EB zwischen n : m und n : m + 1.

Je größer nun n und m, je kleiner demnach α und β angenommen werden, um so näher rücken F und G an A, K und H an B; um so näher kommen die Grenzverhältnisse einander und dem begrenzten irrationalen. (Dies erhellt auch daraus, daß die Differenz ihrer Exponenten $\frac{1}{n}$ um so kleiner wird, je größer n ist.)

§ 129.

Fig. 107. **Zusatz 1.** Daß aus der Proportion AD : DC = BE : EC sich durch Umstellung der Glieder 7 neue Formen herleiten lassen, ist bekannt.

Zusatz 2. Auch verhalten sich die ganzen Seiten wie ein Paar gleichliegende Abschnitte.

AC : CB = AD : BE oder DC : EC.

Denn es verhält sich in jeder Proportion die Summe der beiden ersten Glieder zur Summe der beiden letzten wie ein Paar homologe Glieder.

In derselben Weise ergibt sich, daß, wenn die Schenkel eines Winkels durch mehrere Parallelen geschnitten werden, alle homologen Abschnitte proportioniert sind.

Aufgabe. Zu drei gegebenen geraden Linien a, b und c die vierte Proportionale zu finden, so daß a : b = c : x.

Mehrere sehr leichte Auflösungen.

Anmerkung. Ein besonderer Fall dieser Aufgabe ist die folgende: Zu zwei gegebenen geraden Linien a und b die dritte Proportionale zu finden, so daß a : b = b : x.

§ 130.

Lehrsatz. Die Halbierungslinie eines Winkels im Dreieck teilt die Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen.

Fig. 109. **Voraussetzung.** CD halbiert $\angle$ ACB.

Behauptung. AD : DB = AC : BC.

Beweis. Verlängert man AC um CB bis E und zieht EB, so ist $\angle$ E = $\angle$ o, weil beide = $\frac{1}{2}$ACB sind (§ 53); also ist EB $\parallel$ CD nach § 28, 1 und AD : DB = AC : CE (d. i. CB).

Wie lautet die Umkehrung des Satzes?

Anmerkung. In ähnlicher Weise läßt sich leicht zeigen, daß die Halbierungslinie des einen Nebenwinkels von C die Verlängerung von AB in einem Punkte F trifft, dessen Entfernungen von A und B sich (ebenso wie die des Punktes D von A und B) wie AC : BC verhalten. In der »neueren Geometrie« pflegt man deshalb zu sagen, es sei AB in den beiden Punkten D und F im Verhältnis von AC : BC geteilt.

§ 131.

Lehrsatz. (Umkehrung des § 128.) Eine gerade Linie, welche zwei Seiten eines Dreiecks so teilt, daß die homologen Abschnitte proportioniert sind, ist der dritten parallel.

Voraussetzung. $AD : DC = BE : EC$. Fig. 110.

Behauptung. $DE \parallel AB$.

Beweis. Wäre nicht DE, sondern $DF \parallel AB$, so müßte nach § 128

$AD : DC = BF : FC$ sein;

nach Voraussetzung aber ist $AD : DC = BE : EC$;

wäre drittens $BF : FC = BE : EC$

oder $BF : BE = FC : EC$,

welches unmöglich ist, da ein steigendes Verhältnis nicht einem fallenden gleich sein kann.

Anmerkung. Ebenso leicht läßt sich die Umkehrung von § 129, Zus. 2, beweisen.

§ 132.

Zusatz. Wenn man in einem Dreieck aus einem Punkte einer Seite Parallelen zu den beiden anderen zieht, so sind die Seiten der entstehenden Dreiecke unter sich und denen des größeren proportioniert.

Voraussetzung. $DE \parallel AB$ und $EF \parallel AC$. Fig. 111.

Behauptung. $AC : CB : AB = DC : CE : DE = FE : EB : FB$.

Beweis. Da $DE \parallel AB$, so ist nach § 129, Zus. 2

$AC : CB = DC : CE$ oder $AD : EB$, d. i. $FE : EB$.

Ebenso ist, da $EF \parallel CA$,

$CB : AB = CE : AF$ (d. i. DE) oder $= EB : FB$,

auch $AC : AB = DC : DE$ oder $FE : FB$.

Zusatz. Außerdem sind in den Dreiecken ABC, DEC und FBE die homologen Winkel gleich nach § 27, 1 oder § 32.

Erklärung. Geradlinige Figuren, deren Winkel der Reihe nach gleich, und deren homologe Seiten proportioniert sind, heißen ähnlich.

Folgerung 1. Eine gerade Linie, welche in einem Dreieck einer Seite parallel gezogen wird, schneidet ein ihm ähnliches Dreieck ab.

Folgerung 2. Reguläre Polygone von derselben Seitenzahl sind ähnlich.

§ 133.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zwei Winkeln des anderen sind.

Fig. 112. **Voraussetzung.** $\angle A = \alpha$, $\angle C = \gamma$.

Behauptung. $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$.

Konstruktion. Trägt man $\alpha\gamma$ auf der homologen AC ab, daß sie $= CD$ ist, und zieht (aus D zu einer Seite eine Parallele, so daß CD Seite eines Dreiecks wird, also) $DE \parallel AB$, so ist

Beweis. $\triangle DEC \backsim ABC$ nach § 132, Folg. 1,

$\triangle DEC \cong \alpha\beta\gamma$ nach § 49,

auch $\triangle \alpha\beta\gamma \backsim ABC$.

§ 134.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien des anderen proportioniert und die von ihnen eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Voraussetzung. $AC : CB = \alpha\gamma : \gamma\beta$ und $\angle C = \gamma$.

Behauptung. $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$.

Konstruktion wie in § 133.

Beweis. $\triangle DEC \backsim ABC$, und es verhält sich

$DC : CE = AC : CB$;

außerdem $AC : CB = \alpha\gamma : \gamma\beta$ nach Voraussetzung,

drittens $DC : CE = \alpha\gamma : \gamma\beta$.

Da nun $DC = \alpha\gamma$ nach Konstruktion, so sind auch die Hinterglieder gleich, $CE = \gamma\beta$,

folglich $\triangle DEC \cong \alpha\beta\gamma$ nach § 44,

auch $\triangle \alpha\beta\gamma \backsim ABC$.

§ 135.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen zweien des anderen proportioniert und die den größeren von ihnen gegenüber liegenden Winkel bezüglich gleich sind.

Fig. 112. **Voraussetzung.** $AC : CB = \alpha\gamma : \gamma\beta$,

$AC > CB$, $\alpha\gamma > \gamma\beta$ und $\angle B = \beta$.

Behauptung und **Konstruktion** wie in § 133.

Beweis. $\triangle DEC \backsim ABC$, und es verhält sich

$DC : CE = AC : CB$;

da nun $AC : CB = \alpha\gamma : \gamma\beta$ nach Voraussetzung,

so ist drittens $DC : CE = \alpha\gamma : \gamma\beta$.

Nun ist $DC = \alpha\gamma$ nach Konstruktion,

auch $CE = \gamma\beta$,

$\triangle DEC \cong \alpha\beta\gamma$ nach § 58,

auch $\triangle \alpha\beta\gamma \backsim ABC$.

§ 136.

Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen denen des anderen proportioniert sind.

Voraussetzung. $AB : BC : AC = \alpha\beta : \beta\gamma : \alpha\gamma$. Fig. 112.

Behauptung und **Konstruktion** wie in § 133.

Beweis. $\triangle DEC \backsim ABC$, und es verhält sich
$DE : EC : DC = AB : BC : AC$;
da nun $AB : BC : AC = \alpha\beta : \beta\gamma : \alpha\gamma$ nach Voraussetzung,
so ist drittens $DE : EC : DC = \alpha\beta : \beta\gamma : \alpha\gamma$.
Nun ist $DC = \alpha\gamma$ nach Konstruktion,
auch $DE = \alpha\beta$
und $EC = \beta\gamma$
$\triangle DEC \cong \alpha\beta\gamma$,
auch $\triangle \alpha\beta\gamma \backsim ABC$.

Anmerkung. In derselben Weise ergibt sich, daß zwei Dreiecke auch ähnlich sind, wenn zwei Seiten des einen zweien des anderen proportioniert, die Gegenwinkel der kleineren bezüglich gleich, und die Gegenwinkel der größeren gleichartig sind. (cf. § 61 extr.)

§ 137.

Zusatz. Dreiecke sind auch ähnlich,

1) wenn ihre Seiten paarweise parallel sind;

2) wenn die Seiten des einen auf denen des anderen senkrecht stehen. Teil 1 folgt aus § 32.

Beweis zu Teil 2. $\angle \alpha = A$ als Komplemente der $\angle o$, Fig. 113.
$\angle \beta = B$ als Supplemente von $D\beta E$,
$\triangle \alpha\beta\gamma \backsim ABC$.

§ 138.

Lehrsatz. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die homologen Höhen (d. h. Höhen aus gleichen Winkeln, oder auf homologen Seiten) wie ein Paar homologe Seiten.

Voraussetzung. $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$. Fig. 114.

Behauptung. $CD : \gamma\delta = AC : \alpha\gamma = AB : \alpha\beta$,
oder $H : h = G : g$.

Beweis. $\triangle ADC \backsim \alpha\delta\gamma$ nach § 133,
$CD : \gamma\delta = AC : \alpha\gamma$.
Nach Voraussetzung ist aber $AC : \alpha\gamma = AB : \alpha\beta$,
drittens $CD : \gamma\delta = AB : \alpha\beta$.

Anmerkung. In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß alle in ähnlichen Dreiecken unter gleichen Bedingungen gezogenen Linien (nämlich?) sich wie ein Paar homologe Seiten verhalten und folglich auch untereinander proportioniert sind.

Zusatz. Die Umringe ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie je zwei homologe Seiten.

Fig. 114.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $AB : \alpha\beta = AC : \alpha\gamma = BC : \beta\gamma$, folglich, nach einem bekannten Satze von den Proportionen,

$$AB + AC + BC : \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = AB : \alpha\beta.$$

Dasselbe gilt von ähnlichen Polygonen.

§ 139.

Lehrsatz. Die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten oder homologer Höhen.

Fig. 114.

Voraussetzung. $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$.

Behauptung. $\triangle ABC \cdot \alpha\beta\gamma = G^2 : g^2$ oder $H^2 : h^2$.

Beweis. Nach § 127 verhält sich

$\triangle ABC : \alpha\beta\gamma = G \cdot H : g \cdot h$.

Da nun $H : h = G : g$ nach § 138

und $G : g = G : g$,

so ist $G \cdot H : g \cdot h = G^2 : g^2$,

$\triangle ABC : \alpha\beta\gamma = G^2 : g^2$ oder nach Arithm. § 32, Zus. 1 $= H^2 : h^2$.

§ 140.

Lehrsatz. Ähnliche Polygone können durch homologe Diagonalen (d. h. diejenigen, welche gleiche Winkel verbinden) in ähnliche Dreiecke geteilt werden.

Fig. 115.

Voraussetzung. $ABCDE \backsim \alpha\beta\gamma\delta\eta$.

Behauptung. $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$, $ADC \backsim \alpha\delta\gamma$, $ADE \backsim \alpha\delta\eta$.

Beweis. $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$ nach § 134,

$\angle ACB = \alpha\gamma\beta$.

Da nun $\angle DCB = \delta\gamma\beta$ nach Voraussetzung,

so ist auch $\angle ACD = \alpha\gamma\delta$.

Ferner ist $BC : \beta\gamma = AC : \alpha\gamma$, weil $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$,

und $BC : \beta\gamma = CD : \gamma\delta$ nach Voraussetzung,

drittens $AC : \alpha\gamma = CD : \gamma\delta$,

auch $\triangle ACD \backsim \alpha\gamma\delta$.

In gleicher Weise wird die Ähnlichkeit der noch übrigen Dreiecke gezeigt.

Aufgabe. Ein Polygon zu zeichnen, das einem gegebenen ähnlich ist.

Fig. 116 u. 117.

Die **Auflösung** beruht auf der Umkehrung des vorigen Lehrsatzes. Die beiden anderen Lösungen erhellen aus Figur 116 und 117.

§ 141.

Lehrsatz. Ähnliche Polygone verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Voraussetzung. $ABCDE \backsim \alpha\beta\gamma\delta\eta$. Fig. 115.

Behauptung. $ABCDE : \alpha\beta\gamma\delta\eta = \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2$.

Beweis. Zieht man die homologen Diagonalen, wie im vor. Lehrs., so ist $\triangle ABC \backsim \alpha\beta\gamma$ nach § 140,

$\triangle ABC : \alpha\beta\gamma = \overline{AC}^2 : \overline{\alpha\gamma}^2$ nach § 139;

desgleichen $\triangle ACD \backsim \alpha\gamma\delta$,

auch $\triangle ACD : \alpha\gamma\delta = \overline{AC}^2 : \overline{\alpha\gamma}^2$,

drittens $\triangle ABC : \alpha\beta\gamma = ACD : \alpha\gamma\delta$.

Ebenso ergibt sich $\triangle ACD : \alpha\gamma\delta = ADE : \alpha\delta\eta$,

$\triangle ABC : \alpha\beta\gamma = ACD : \alpha\gamma\delta = ADE : \alpha\delta\eta$,

$\triangle ABC + ACD + ADE : \alpha\beta\gamma + \alpha\gamma\delta + \alpha\delta\eta = ABC : \alpha\beta\gamma$,

d. i. $ABCDE : \alpha\beta\gamma\delta\eta = \overline{AB}^2 : \overline{\alpha\beta}^2$.

§ 142.

Lehrsatz. Wenn man im rechtwinkligen Dreieck aus dem Scheitel des rechten Winkels auf die Hypotenuse eine Senkrechte fällt, so ist

1) diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten der Hypotenuse,

2) jede der beiden Katheten die mittlere Proportionale zwischen dem an ihr liegenden Abschnitt und der ganzen Hypotenuse.

Voraussetzung. $\angle ACB = R$ und $CD \perp AB$. Fig. 118.

Behauptung. 1) $AD : DC = DC : DB$,

2) $AD : AC = AC : AB$

und $DB : BC = BC : AB$.

Beweis. $\triangle ACD \backsim ACB$ nach § 133,

$AD : AC = AC : AB$;

desgleichen $\triangle BCD \backsim ACB$,

$DB : BC = BC : AB$

und $\angle BCD = A$,

$\triangle ACD \backsim BCD$,

$AD : DC = DC : DB$.

Zusatz 1. Aus Teil 2 ergibt sich ein leichter Beweis des Pythagoreischen Satzes.

Weil nämlich $AD : AC = AC : AB$,

so ist $\overline{AC}^2 = AD \cdot AB$,

und weil $DB : BC = BC : AB$,

so ist $\overline{BC}^2 = DB \cdot AB$,

durch Addition $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = AD \cdot AB + DB \cdot AB$, d. i.

$= (AD + DB) \cdot AB = \overline{AB}^2$.

Zusatz 2. Was im Pythagoreischen Satze von Quadraten gesagt ist, gilt von allen über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks (als homologen Seiten) konstruierten ähnlichen Figuren.

Beweis. Bezeichnet man die Katheten mit a und b, die Hypotenuse mit c, die Flächen der ähnlichen Figuren mit A, B und C,

$$\text{so ist } A : B = a^2 : b^2 \text{ nach § 141,}$$
$$\overline{A + B : A = a^2 + b^2 : a^2.} \text{ Ferner ist}$$
$$C : A = c^2 : a^2 \text{ nach § 141,}$$
$$\overline{\text{da } a^2 + b^2 = c^2 \text{ nach § 116, auch } A + B = C.}$$

Anmerkung. Da man Kreise als ähnliche Polygone ansehen kann (§ 158), so gilt der Satz auch von den über den Seiten beschriebenen Halbkreisen, mithin, nach Abzug der gemeinschaftlichen Kreisabschnitte, auch von den Resten (Lunulae Hippocratis).

§ 143.

Aufgabe 1. Zu zwei gegebenen geraden Linien a und b die mittlere Proportionale zu zeichnen.

Auflösung 1. Man beschreibe über der Summe der beiden Linien einen Halbkreis und errichte in ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte eine Senkrechte bis zur Peripherie; so ist diese die verlangte Linie nach § 142, Teil 1, in Verbindung mit § 93, 2.

Auflösung 2 gründet sich auf § 142, Teil 2, und ist der vorigen ähnlich.

Aufgabe 2. Irgend eine gegebene geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln (geometrisch zu quadrieren).

Auflösung. Man suche zwischen den beiden Linien, deren Produkt gleich dem Flächeninhalt der Figur ist, die mittlere Proportionale; diese ist die Seite des verlangten Quadrates.

Beweis. Bezeichnet man diese Seite mit x, das Quadrat selbst demnach mit x^2, d. i. $x \cdot x$, so ergibt sich aus

$$\text{Prllg.} = g \cdot h = x \cdot x, \text{ daß } g : x = x : h,$$
$$\text{aus Dreieck} = g \cdot \frac{h}{2} = x \cdot x, \text{ daß } g : x = x : \frac{h}{2} \text{ usw.}$$

Aufgabe 3. Ein gegebenes ungleichseitiges Dreieck ABC in ein gleichseitiges zu verwandeln.

Fig. 119. **Auflösung.** Man suche zwischen der Höhe des gegebenen und der Höhe des über seiner Grundlinie konstruierten gleichseitigen Dreiecks die mittlere Proportionale; diese ist die Höhe des verlangten Dreiecks.

Beweis. Zieht man aus G, dem Endpunkte der mittleren Proportionale, GH ∥ DA und GK ∥ DB, so ist △ GHK gleichseitig; denn es ist △ ABD ähnlich. Ferner ist △ GHK = ABC, da sie beide zu △ ABD in gleichem Verhältnis stehen, nämlich von FE : DE (§ 127, Folg. 3, und § 139).

Anmerkung. Die Aufgabe ist nur ein spezieller Fall der folgenden: Ein gegebenes Dreieck ABC in ein anderes zu verwandeln, das dem gegebenen $\triangle\ \alpha\beta\gamma$ ähnlich ist.

Aufgabe 4. Eine geradlinige Figur zu zeichnen, welche einer gegebenen ähnlich ist und zu ihr in einem gegebenen Verhältnis steht.

Auflösung. Es sei F der Flächeninhalt, S eine Seite der gegebenen Figur, f die Fläche, s die homologe Seite der verlangten Figur, und es soll sich verhalten

$$F : f = 1 : m; \text{ so muß,}$$
$$\text{da } F : f = S^2 : s^2 \text{ nach § 141,}$$
$$\text{drittens } S^2 : s^2 = 1 : m \text{ sein,}$$
$$s^2 = mS^2, \text{ d. i. } s \cdot s = mS \cdot S,$$
$$S : s = s : mS.$$

Man suche also zwischen einer Seite der gegebenen Figur und dem mfachen dieser Seite die mittlere Proportionale; diese ist die homologe Seite der verlangten Figur. Dann verfahre man nach § 140, Aufgabe.

Anmerkung 1. Man nennt dies eine Figur in einem bestimmten Maße verjüngen (wenn $m < 1$) oder vergrößern (wenn $m > 1$).

Anmerkung 2. Ein spezieller Fall dieser Aufgabe ist die folgende: Von einem gegebenen Dreieck durch eine Parallele zu einer Seite einen bestimmten Bruchteil abzuschneiden.

§ 144.

Lehrsatz. Alle geraden Linien, welche von einem Winkelpunkte eines Dreiecks nach der Gegenseite gezogen werden, teilen diese und jede zu ihr im Dreieck gezogene Parallele in gleichem Verhältnis.

Voraussetzung. $DE \parallel AB$. Fig. 120.

Behauptung. $AF : DH = FG : HK = GB : KE$.

Beweis. $AF : DH = CF : CH$, weil $\triangle\ AFC \backsim DHC$,
desgl. $FG : HK = CF : CH$, weil $\triangle\ FGC \backsim HKC$,
drittens $AF : DH = FG : HK$.

Auf dieselbe Weise ergibt sich $FG : HK = GB : KE$.

Folgerung. Die Transversale nach einer Seite eines Dreiecks halbiert auch jede zu ihr im Dreieck gezogene Parallele.

§ 145.

Lehrsatz. Die Transversale nach einer Seite eines Dreiecks geht durch den Durchschnittspunkt der beiden Linien, welche die Endpunkte jener Seite mit den Endpunkten einer im Dreieck zu ihr gezogenen Parallele verbinden, und ist harmonisch geteilt, d. h. in drei Teile so geteilt, daß der erste Teil sich zum zweiten verhält wie die ganze Linie zum dritten.

Fig. 121.

Voraussetzung. DE ∥ AB, AF = FB und AHE eine gerade Linie.

Behauptung. DHB ist auch eine gerade Linie
und FH : HG = FC : GC.

Beweis. △ AFH ∽ EGH nach § 133,
AF : FH = EG : GH,
auch FB : FH = GD : GH nach § 144, Folg.
Außerdem ist ∠ BFH = DGH,
△ BFH ∽ DGH,
∠ FHB = DHG,
DHB eine gerade Linie nach § 22.
Ferner ist FH : HG = AF : DG (statt EG)
und AF : DG = FC : GC, weil △ AFC ∽ DGC,
drittens FH : HG = FC : GC.

Anmerkung. In der »neueren Geometrie« ist es gebräuchlich zu sagen, es sei FG in den beiden Punkten H und C, oder auch CH in den Punkten G und F harmonisch geteilt. (Vergl. § 130, Anmerk.) F, H, G und C heißen harmonische Punkte, und F und G, ebenso H und C konjugierte Punkte.

Aufgabe. Eine gerade Linie harmonisch zu teilen, wenn ein Teilpunkt gegeben ist.

Die **Auflösung** ist leicht. (cf. § 166, 11.)

§ 146.

Lehrsatz. Die drei Transversalen eines Dreiecks schneiden sich in **einem** Punkte und sind in ihm im Verhältnis von 1 : 2 geteilt.

Fig. 122.

Voraussetzung. D, E und F sind die Mitten der drei Seiten.

Behauptung. AE, BD und CF schneiden sich in einem Punkte, und DH : HB = EH : HA = FH : HC = 1 : 2.

Beweis. Zieht man DE, so ist sie ∥ AB, weil
AD : DC = BE : EC (nämlich = 1 : 1),
also die Behauptung 1 nach vorigem Paragraph erwiesen.
Ferner ist △ DEH ∽ ABH nach § 133,
DH : HB = EH : HA = DE : AB, d. i. auch
= DC : AC = 1 : 2.
Zieht man noch FE, so zeigt sich, daß auch
FH : HC = EH : AH = 1 : 2.

Anmerkung. Der Durchschnittspunkt der Transversalen eines Dreiecks heißt der *Schwerpunkt* (Baryzentrum) des Dreiecks, weil die Fläche desselben um ihn herum gleichmäßig verteilt ist (§ 112, 2).

§ 147.

Lehrsatz. Die drei Höhen eines Dreiecks (aus den Winkelpunkten gefällt) schneiden sich in einem Punkte und verhalten sich umgekehrt wie die Seiten, auf welche sie gefällt sind.

Voraussetzung. CD ⊥ AB, AE ⊥ CB, BF ⊥ AC. Fig. 123.

Behauptung. AE, BF und CD schneiden sich in einem Punkte,
und AE : BF = AC : BC,
AE : CD = AB : BC,
BF : CD = AB : AC.

Beweis. Legt man durch A, B, C Parallelen zu BC, AC, AB, so sind AE, BF und CD die Senkrechten aus den Mitten der Seiten des entstehenden Dreiecks, schneiden sich also in einem Punkte nach § 68.

Behauptung 2 folgt aus der Ähnlichkeit von
△ CEA und CFB, BEA und BDC, AFB und ADC.

2. Von der Proportionalität gerader Linien am Kreise.

§ 148.

Lehrsatz 1. Wenn zwei Sehnen sich innerhalb eines Kreises schneiden, so sind ihre Abschnitte wiederkehrend proportioniert; d. h. die Abschnitte der einen Sehne bilden die äußeren, die der anderen Sehne die inneren Glieder einer Proportion.

Behauptung. AE : CE = DE : BE. Fig. 124.

Beweis. Zieht man AC und DB, so ist in den Dreiecken AEC und DEB
∠ C = ∠ B nach § 93, 1
und ∠ AEC = DEB nach § 21,
△ AEC ∽ DEB usw.

Lehrsatz 2. Wenn zwei Sekanten sich außerhalb eines Kreises schneiden, so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußeren Abschnitte.

Behauptung. AE : EC = ED : EB. Fig. 125.

Beweis. Zieht man AD und BC, so folgt die Behauptung aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ADE und CBE.

Anmerkung. Offenbar sind beide Sätze nur besondere Fälle eines und desselben Satzes, der sich folgendermaßen ausdrücken läßt:
Wenn man durch einen Punkt — innerhalb oder außerhalb eines Kreises — irgend eine gerade Linie zieht, welche die Peripherie schneidet, so ist das Rechteck aus den Entfernungen des Punktes von den Durchschnittspunkten eine unveränderliche Größe (konstant).

Lehrsatz 3. Wenn eine Tangente und eine Sekante sich außerhalb des Kreises schneiden, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zwischen der ganzen Sekante und ihrem äußeren Abschnitt.

Fig. 126. **Voraussetzung.** AB eine Tangente in A.

Behauptung. $CB : AB = AB : DB$.

Beweis 1. Betrachtet man die Tangente als eine Sekante, deren innerer Abschnitt gleich null, die also ganz äußerer Abschnitt ist, so folgt die Behauptung als spezieller Fall aus vorigem Lehrsatze.

Beweis 2. Zieht man AD und AC, so ist $\triangle CAB \backsim ADB$ (§ 94) usw.

§ 149.

Zusatz. Wenn die Tangente gleich dem inneren Abschnitte der Sekante ist, so ist diese stetig, d. h. in zwei Teile so geteilt, daß der größere Teil die mittlere Proportionale ist zwischen dem kleineren und der ganzen Linie.

Fig. 127. **Beweis.** Nach vorigem Lehrsatz ist $CB : AB = AB : DB$; da nun nach Voraussetzung $AB = CD$ ist, so folgt $CB : CD = CD : CB$.

Anmerkung 1. Man erhält die entsprechende Figur am leichtesten, wenn man die Tangente gleich dem Durchmesser macht und aus ihrem Endpunkte die Sekante durch den Mittelpunkt zieht.

Zusatz 2. Trägt man den äußeren Abschnitt einer stetig geteilten Sekante auf der Tangente ab, so ist auch diese stetig geteilt.

Fig. 127. **Beweis.** Nach Vorausf. ist $CB : CD = CD : DB$,

$CB - CD : CD - DB = CD : DB$,

d. i. DB oder $EB : AE = AB : EB$,

durch Umstell. der Verh. $AB : EB = EB : AE$.

Anmerkung 2. Die stetige Teilung führt auch den Namen goldener Schnitt oder sectio divina.

§ 150.

Aufgabe 1. Eine gegebene gerade Linie AB stetig zu teilen.

Auflösung. Man mache sie zur Tangente eines Kreises, dessen Durchmesser ihr gleich ist, und vervollständige die Figur; d. h. man errichte in A die Senkrechte $AC = \frac{1}{2}AB$, beschreibe mit AC von C aus einen Kreis, verbinde C mit B und trage DB auf AB ab. (Fig. 128.)

Beweis beruht auf § 149, Zus. 2.

Aufgabe 2. An eine gegebene gerade Linie eine kleinere anzutragen, daß die ganze stetig geteilt ist.

Auflösung wie bei Aufgabe 1, nur daß man DB nicht auf AB ab-, sondern an AB anträgt. — Beruht auf Zus. 1.

Aufgabe 3. An eine gegebene Linie eine größere anzutragen, so daß die ganze Linie stetig geteilt ist.

Auflösung. Man trage eine kleinere an, so daß die ganze stetig geteilt ist, und trage die ganze an die gegebene Linie an. Die Lösung beruht darauf, daß EB oder DB zugleich größerer Abschnitt der stetig geteilten AB und kleinerer Abschnitt der stetig geteilten CB, und daß $AB = CD$ ist. (Fig. 127.)

§ 151.

Lehrsatz. Wenn die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks gleich dem größeren Abschnitte des stetig geteilten einen Schenkels ist, so ist der Basiswinkel doppelt so groß als der Winkel an der Spitze.

Voraussetzung. $AC = CB$, $AC : DC = DC : AD$ und $AB = DC$. Fig. 129.

Behauptung. $\angle A$ oder $B = 2C$.

Beweis. Zieht man BD, so ist in den beiden Dreiecken ABC und ABD

$$AC : AB = AB : AD \text{ nach Voraussf.}$$
$$\text{und } \angle A = A,$$
$$\triangle ABC \backsim ABD;$$

da nun $\triangle ABC$ gleichschenklig ist, so ist es auch ABD, d. h. $AB = DB$, demnach auch $DC = DB$, folglich $\angle ADB$ oder $\angle A = 2C$ (§ 53).

Zusatz. Der Winkel an der Spitze eines solchen Dreiecks ist $= \frac{2}{5}R$, also gleich dem Zentriwinkel eines regulären Zehnecks, seine Basis demnach die Seite, sein Schenkel der größte Radius des Zehnecks.

Beweis. Nach § 40 ist $\angle A + B + C = 2R$, Fig. 129.

nach vorigem Lehrsatze $\angle 2C + 2C + C$, d. i. $5C = 2R$,

$$\angle C = \tfrac{2}{5}R.$$

Folgerung. Die Seite eines regulären Zehnecks ist gleich dem größeren Abschnitte des stetig geteilten größten Radius.

Anmerkung 1. Hieraus ergibt sich, 1) wie man in einen gegebenen Kreis ein reguläres Zehneck, mithin auch ein reguläres Fünfeck, Zwanzigeck usw. einbeschreibt. (§ 150, Aufg. 1.)

2) Wie man über einer gegebenen Linie (als Seite) ein reguläres Zehneck konstruiert. (§ 150, Aufg. 2)

Anmerkung 2. Der Zusatz läßt sich folgendermaßen umkehren: Fig. 129.

Ist $\angle C = \frac{2}{5}R$, so ist AB gleich dem größeren Abschnitte der stetig geteilten AC.

Denn halbiert man $\angle B$ durch BD, so ist

$DC = DB$, weil $\angle C = DBC = \frac{2}{5}R$,

$DB = AB$, weil $\angle A = ADB = \frac{4}{5}R$,

auch $DC = AB$.

Ferner ist $\triangle ADB \backsim ABC$ nach § 133,

folglich $AD : AB = AB : AC$ oder

$AD : DC = DC : AC$.

§ 152.

Aufgabe. In einen gegebenen Kreis ein reguläres Fünfzehneck einzuzeichnen.

Fig. 130. **Auflösung.** Man schneide vom Bogen des regulären Sechsecks $\widehat{AB}$ den Bogen des Zehnecks $\widehat{AD}$ ab; so ist der Rest $\widehat{DB}$ der Bogen des Fünfzehnecks.

Beweis. $\widehat{AB} = \frac{1}{6}$ der Peripherie $= \frac{1}{6}P$,

$$\widehat{AD} = \frac{1}{10}P,$$

$$\widehat{DB} = \frac{1}{6}P - \frac{1}{10}P = \frac{1}{15}P.$$

(Auch mittels der Zentriwinkel zu erweisen.)

Anmerkung 1. Durch fortgesetzte Halbierung der Zentriwinkel gelangt man zum regulären Dreißigeck, Sechzigeck usw.

Anmerkung 2. Die in § 90 geforderte Teilung der Kreislinie in 360 gleiche Teile ist durch geometrische Konstruktion (nur mittels Lineal und Zirkel) nicht möglich. Man vollzieht sie durch Probieren.

Sechster Abschnitt.

Berechnung der Seiten regulärer Polygone und Rektifikation und Quadratur des Kreises.

§ 158.

Aufgabe 1. Die Seite des regulären Sechsecks, des regulären Vierecks, des regulären Dreiecks und des regulären Zehnecks durch den größten Radius auszudrücken.

Auflösung.

1) Bedeutet r den größten Radius und S_6 die Seite des Sechsecks, so ist $S_6 = r$ nach § 105, Folg. 2.

2) $S_4 = r\sqrt{2}$.

Denn da $\beta_4 = R$ ist, so ist $S_4^2 = r^2 + r^2$ nach § 116,

$$\text{also } S_4^2 = 2r^2 \text{ und } S_4 = \sqrt{2r^2} = r\sqrt{2}.$$

3) $S_3 = r\sqrt{3}$.

Fig. 131. Denn halbiert man den Zentriwinkel AMB durch MD und zieht AD, so ist $\triangle AMD$ gleichseitig; die Senkrechte AE halbiert also MD.

Bezeichnet man nun ME mit ϱ_3, so ist $\varrho_3 = \frac{1}{2}r$

$$\text{und } \overline{AE}^2 = \left(\frac{S_3}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{1}{4}r^2 = \frac{3}{4}r^2,$$

$$\text{also } \frac{S_3}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}r^2} = \frac{r}{2}\sqrt{3} \text{ und } S_3 = r\sqrt{3}.$$

4) $S_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Beweis. Es sei r stetig geteilt, x der größere Abschnitt, also $r - x$ der kleinere; dann ist nach § 151, Folg., $S_{10} = x$.

Nun verhält sich

$$r : x = x : r - x,$$
$$x^2 = r^2 - rx,$$
$$x^2 + rx = r^2,$$
$$x^2 + rx + \frac{r^2}{4} = r^2 + \frac{r^2}{4} = \frac{5r^2}{4},$$

wenn man die Wurzel auszieht, $x + \frac{r}{2} = \sqrt{\frac{5r^2}{4}} = \frac{r}{2}\sqrt{5}$,

$$x = \frac{r}{2}\sqrt{5} - \frac{r}{2} \text{ oder } \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Anmerkung. Die Seite des regulären Fünfecks findet man am leichtesten aus der Seite des Zehnecks mittels der im nächsten Paragraphen entwickelten Formel. Man erhält $S_5 = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Aufgabe 2. Die Flächeninhalte der erwähnten regulären Figuren durch ihren größten Radius auszudrücken.

Auflösung. $F_6 = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3}$, $F_4 = 2r^2$, $F_3 = \frac{3}{4}r^2\sqrt{3}$, $F_{10} = \frac{5}{4}r^2\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

Sie ergeben sich sämtlich, wenn man in der Gleichung $F_n = \frac{n \cdot S \cdot \varrho}{2}$ für ϱ seinen Wert $\sqrt{r^2 - \frac{S^2}{4}}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - S^2}$ setzt und für n und S die speziellen Werte einträgt*)

§ 154.

Aufgabe. Aus der Seite S des regulären $n$ecks und seinem größten Radius r die Seite S_{2n} des in denselben Kreis einbeschriebenen regulären $2n$ecks zu berechnen.

Auflösung. Wenn AB die Seite S des $n$ecks vorstellt, so ist AD die des $2n$ecks, mithin im Dreieck AED (Fig. 131.)

$$S_{2n}^2 = \frac{S^2}{4} + (r - \varrho)^2$$
$$= \frac{S^2}{4} + r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho.$$

Zieht man nun die Wurzel aus und setzt für ϱ^2 seinen Wert $r^2 - \frac{S^2}{4}$, also für ϱ selbst $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - S^2}$, so erhält man

*) Beim regulären Dreieck ist ϱ schon gefunden, nämlich $\varrho = \frac{1}{2}r$.

$$S_{2n} = \sqrt{\frac{S^2}{4} + r^2 + r^2 - \frac{S^2}{4} - r\sqrt{4r^2 - S^2}}, \text{ d. i.}$$
$$= \sqrt{2r^2 - r\sqrt{4r^2 - S^2}} \text{ oder}$$
$$= \sqrt{2r^2 - \frac{r^2}{r}\sqrt{4r^2 - S^2}}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{S^2}{r^2}}}.$$

§ 155.

Folgerungen.

1) $S_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}},$

$S_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}},$

$S_{48} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$ usw.

Beweis. Trägt man in die Formel für S_{2n} am Schluß des vorigen Paragraphen r statt S ein (weil $S_6 = r$),

so ergibt sich $S_{12} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - 1}}$, d. i. $= r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

Trägt man den eben gefundenen Wert von S_{12} in jene Formel ein, so geht S_{2n} über in S_{24},

und man erhält $S_{24} = r\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{r^2(2 - \sqrt{3})}{r^2}}}$

$$= r\sqrt{2 - \sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}}$$
$$= r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{3}}} \text{ usw.}$$

2) Ausgehend von $S_4 = r\sqrt{2}$ (nach § 153, 2) findet man in derselben Weise

$S_8 = r\sqrt{2 - \sqrt{2}},$

$S_{16} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$

$S_{32} = r\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}$ usw.

§ 156.

Aufgabe. Aus der Seite S^i des regulären n ecks **im** Kreise und seinem größten Radius r die Seite S^u des regulären n ecks **um** den Kreis zu berechnen.

Auflösung. $S^u = \frac{2r \cdot S^i}{\sqrt{4r^2 - S^{i2}}}$.

Beweis. In den beiden gleichschenkligen Dreiecken ABM und OGM ist $\angle AMB = OMG$, weil beide $= 2 \angle AMG$; mithin sind auch die Basiswinkel gleich und $\triangle ABM \backsim OGM$, (Fig. 79.)

$$\overline{AB} : \overline{OG} = \overline{MP} : \overline{MA} \text{ nach § 138,}$$

$$\text{d. i. } S^i : S^u = \varrho : r,$$

$$S^u = \frac{r \cdot S^i}{\varrho} = \frac{r \cdot S^i}{\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - S^{i2}}}$$

$$= \frac{2r \cdot S^i}{\sqrt{4r^2 - S^{i2}}}.$$

§ 157.

Demzufolge ist

$$S^u_3 = 2r\sqrt{3},$$

$$S^u_6 = \tfrac{2}{3}r\sqrt{3},$$

$$S^u_{12} = 2r(2 - \sqrt{3}),$$

$$S^u_4 = 2r,$$

$$S^u_8 = 2r(\sqrt{2} - 1).$$

Beweis. 1) $S^u_3 = \frac{2r \cdot r\sqrt{3}}{\sqrt{4r^2 - 3r^2}} = \frac{2r \cdot r\sqrt{3}}{r} = 2r\sqrt{3}$.

2) $S^u_6 = \frac{2r \cdot r}{\sqrt{4r^2 - r^2}} = \frac{2r \cdot r}{r\sqrt{3}} = \frac{2r\sqrt{3}}{3}$.

3) $S^u_{12} = \frac{2r \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4r^2 - r^2(2 - \sqrt{3})}} = \frac{2r \cdot r\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{r\sqrt{4 - 2 + \sqrt{3}}}$

$$= \frac{2r\sqrt{2 - \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2r(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{1}} = 2r(2 - \sqrt{3}) \text{ usw.}$$

§ 158.

Die Ergebnisse der §§ 154 bis 157 führen zur **Berechnung** (**arithmetischen Rektifikation**) **der Kreislinie.**

Denn da der Umring jedes Polygons im Kreise*) kleiner ist als dessen Peripherie, der Umring des regulären 2n ecks aber größer als der des

*) Die Sehne ist kleiner als der zugehörige Bogen. (§ 12.)

ecks in demselben Kreise,*) so muß der Umring (ebenso wie die Fläche) der regulären Polygone im Kreise durch unausgesetzte Verdoppelung der Seitenzahl dem Kreise immer näher kommen und bei einer Vervielfältigung bis ins Unendliche den Kreis erreichen.

Der Kreis kann also betrachtet werden als ein reguläres Polygon von unendlich vielen und unendlich kleinen Seiten, dessen größter und kleinster Radius einander gleich sind.

§ 159.

Zu demselben Resultate gelangt man, wenn man die Seitenzahlen der umschriebenen regulären Polygone unausgesetzt verdoppelt.

Ihre Umringe nämlich werden, ebenso wie ihre Flächen, offenbar unausgesetzt kleiner, bleiben aber, weil $S''_n > S'_n$ ist, immer größer als die der einbeschriebenen ähnlichen Polygone, auch dann noch, wenn diese bei unendlicher Vervielfältigung ihrer Seiten in den Kreis selbst übergehen.

§ 160.

Die Kreislinie ist also der Grenzwert, dem man sich ohne Ende nähert, wenn man die Perimeter ähnlicher in und um den Kreis beschriebener regulärer Polygone von immer größerer Seitenzahl berechnet und ihr arithmetisches Mittel nimmt, d. h. ihre Summe halbiert.

Man findet auf diese Weise die Peripherie des Kreises $P = d \cdot \pi$, wenn man unter d den Durchmesser des Kreises und unter π die irrationale Zahl 3,14159265 .... versteht.

Es ist also π diejenige Zahl, welche mit dem Durchmesser multipliziert die Peripherie gibt, oder, da $\frac{P}{d} = \pi$ ist, diejenige Zahl, welche das Verhältnis des Durchmessers zur Peripherie anzeigt.

Sie heißt auch die Ludolfsche Zahl, weil Ludolf van Ceulen sie zuerst genauer (auf 35 Bruchstellen) berechnete.

Anmerkung. Archimedes berechnete π aus dem Umringe des regulären 96ecks und erhielt $3\frac{1}{7}$ oder 3,1428 ..., also das Verhältnis 7 : 22. Viel genauer ist das von Adrian Antonisse (Metius) gefundene und ebenfalls in nicht großen ganzen Zahlen ausgedrückte Verhältnis 113 : 355.

§ 161.

Der Flächeninhalt eines Kreises F ist $= r^2\pi$.

---

*) Die Summe je zweier Seiten eines Dreiecks ist größer als die dritte. (§ 12.)

Denn da er als reguläres Polygon angesehen werden kann, dessen r und ϱ gleich groß sind, so ist nach § 126, 4

$$F = \frac{P \cdot r}{2}, \text{ d. i. } = \frac{2r\pi \cdot r}{2} = r^2\pi.$$

Anmerkung. Die Berechnung der Kreisfläche heißt die *arithmetische Quadratur des Kreises*.

§ 162.

Folgerung 1. Die *Peripherien* zweier Kreise verhalten sich wie ihre *Radien* oder ihre Durchmesser, die *Flächen* wie die *Quadrate* der *Radien* oder der Durchmesser.

Nämlich $P : P' = 2r\pi : 2r'\pi = r : r'$,

und $F : F' = r^2\pi : r'^2\pi = r^2 : r'^2$.

Folgerung 2. Aus den Gleichungen $P = 2r\pi$ und $F = r^2\pi$ folgt

$$r = \frac{P}{2\pi} = \sqrt{\frac{F}{\pi}},\ d = \frac{P}{\pi},\ F = \frac{P^2}{4\pi} \text{ usw.}$$

§ 163.

Aufgabe. Aus dem Zentriwinkel w und dem Radius r eines Kreises den zugehörigen Bogen b und den Sektor Sct zu berechnen.

Auflösung. 1) Daß die Bogen eines Kreises sich wie die zugehörigen Zentriwinkel verhalten, läßt sich mittels Aufsuchung eines gemeinschaftlichen Maßes leicht zeigen. Sind sie inkommensurabel, so verfahre man nach § 128, Anmerk. 2.

Es ist also auch $b : P = w : 360^\circ$,

$$b = \frac{P \cdot w}{360^\circ} = \frac{r\pi w}{180^\circ}.$$

2) Ebenso verhält sich $Sect. : F = w : 360^\circ$;

folglich ist $Sect. = \frac{Fw}{360^\circ} = \frac{r^2\pi w}{360^\circ}$.

Dasselbe erhält man, wenn man den Sektor als Dreieck betrachtet, dessen Grundlinie der Bogen, dessen Höhe der Radius ist.

Demnach ist $Sect. = \frac{b \cdot r}{2}$.

Trägt man für b seinen Wert ein, so ergibt sich die erste Formel.

§ 164.

Aufgabe. Die Peripherie eines Kreises annähernd geometrisch zu rektifizieren.

Fig. 132. **Auflösung.** Man trage auf der Verlängerung eines Durchmessers, von seinem Endpunkte D aus, $\frac{r}{5}$ dreimal ab und errichte im anderen Endpunkt A einen Perpendikel, auf welchem man den Radius aufträgt. Seinen Endpunkt B verbinde man mit dem ersten und dem dritten Teilpunkte, mit α und γ, trage die erste Verbindungslinie $B\alpha$ auf dem Perpendikel vom Fußpunkt A aus ab und ziehe aus ihrem Endpunkte E eine Parallele EF zur zweiten Verbindungslinie $B\gamma$; so schneidet diese Parallele von dem verlängerten Durchmesser eine der Peripherie gleiche Linie ab.

Beweis. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $AB\gamma$ und AEF folgt:

$$AB : A\gamma = AE, \text{ d. i. } B\alpha : AF,$$

$$AB = r,\quad A\gamma = \tfrac{13}{5}r,\quad B\alpha = \sqrt{r^2 + \left(\tfrac{11}{5}r\right)^2} = \frac{r}{5}\sqrt{146},$$

$$\text{also } AF = \frac{\frac{13}{5}r \cdot \frac{r}{5}\sqrt{146}}{r} = \tfrac{13}{25}r\sqrt{146} = \tfrac{13}{50}d\sqrt{146}.$$

Berechnet man nun $\frac{13}{50}\sqrt{146}$, so erhält man π bis auf die siebente Bruchstelle richtig.

Anmerkung. Mit der geometrischen Rektifikation der Kreislinie ist offenbar (nach § 143, Aufgabe 2) auch die geometrische Quadratur des Kreises erledigt.

§ 165.

Den Ring zweier konzentrischen Kreise findet man durch ihre Radien R und r also ausgedrückt:

$$Rg = (R^2 - r^2)\pi \text{ oder } (R + r)(R - r)\pi,$$

und einen Ringausschnitt durch Multiplikation des Ringes mit $\frac{w}{360^0}$.

Siebenter Abschnitt.

Aufgaben aus der rechnenden Geometrie.

§ 166.

1) Wenn a die Seite, d die Diagonale, F den Flächeninhalt eines **Quadrats** bedeutet: aus jeder dieser drei Größen die anderen zu finden.

Auflösung. Aus den bekannten Grundgleichungen

$F = a^2$ (§ 125) und $d^2 = 2a^2$ (§ 116) folgt:

$$a = \sqrt{F},\ d = a\sqrt{2},\ F = \frac{d^2}{2},$$

$$a = \frac{d}{2}\sqrt{2},\ d = \sqrt{2F}.$$

2) Aus je zweien der 4 Bestimmungen am Rechteck, a, b, d und F, die anderen zu berechnen

Auflösung. Die beiden Grundgleichungen

$F = ab$ und $d^2 = a^2 + b^2$ ergeben zunächst

$$a = \frac{F}{b},\ d = \sqrt{a^2 + b^2},\ a = \sqrt{d^2 - b^2},$$

$$F = a\sqrt{d^2 - a^2} \text{ usw}$$

Sucht man a und b, so addiere man die mit 2 multiplizierte erste Gleichung zur zweiten und ziehe die Wurzel aus; ebenso subtrahiere man die Gleichungen und ziehe die Wurzel aus. Man erhält alsdann

$a + b = \sqrt{d^2 + 2F}$ und $a - b = \pm\sqrt{d^2 - 2F}$, demnach

$$a \text{ oder } b = \frac{\sqrt{d^2 + 2F} + \sqrt{d^2 - 2F}}{2}.$$

3) Auf ähnliche Weise findet man

im **rechtwinkligen Dreieck** aus je zweien der vier Bestimmungen, a, b, c (Hypotenuse) und F, die übrigen mittels der Gleichungen

$$F = \frac{ab}{2} \text{ und } c^2 = a^2 + b^2,$$

und im **gleichschenkligen Dreieck** aus je zweien der vier Größen: Basis (b), Höhe auf sie (h), Schenkel (a) und F, die anderen mittels der Gleichungen

$$F = \frac{b}{2} \cdot h \text{ und } a^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + h^2.$$

Im gleichseitigen Dreieck ergibt sich

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3},\quad F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}, \text{ demnach}$$

$$a = \tfrac{2}{3}h\sqrt{3},\quad a = 2\sqrt{\frac{F\sqrt{3}}{3}},\quad F = \frac{h^2}{3}\sqrt{3} \text{ und } h = \sqrt{F\sqrt{3}}.$$

4) Den Flächeninhalt eines ungleichseitigen Dreiecks durch seine Seiten a, b und c auszudrücken.

Auflösung. Bezeichnet man die Abschnitte, in welche a durch h geteilt wird, mit x und $a - x$ und eliminiert h aus den beiden

Gleichungen $h^2 = b^2 - x^2$ und $h^2 = c^2 - (a - x)^2$,

so erhält man $b^2 - x^2 = c^2 - a^2 + 2ax - x^2$,

$$\text{folglich } x = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}.$$

Es ist aber $h = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{(b + x)(b - x)}$

$$\text{und } F = \frac{a}{2}\sqrt{(b + x)(b - x)}.$$

Trägt man in diese Gleichung den Wert von x ein, verwandelt die gemischten Zahlen in Brüche, vereinigt die Glieder mit Hilfe der Formeln für $(a + b)^2$ und $(a - b)^2$,

$$\text{so findet man } F = \frac{a}{4a}\sqrt{((a + b)^2 - c^2)(c^2 - (a - b)^2)}$$

$$= \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(c + a - b)(c - a + b)}.$$

Setzt man endlich $a + b + c = S$, also $a + b - c = S - 2c$ etc.,

$$\text{so ergibt sich } F = \tfrac{1}{4}\sqrt{S(S - 2c)(S - 2b)(S - 2a)}, \text{ oder auch}$$

$$= \sqrt{\frac{S}{2}\left(\frac{S}{2} - a\right)\left(\frac{S}{2} - b\right)\left(\frac{S}{2} - c\right)}$$

$$\text{und } h = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{S}{2}\left(\frac{S}{2} - a\right)\left(\frac{S}{2} - b\right)\left(\frac{S}{2} - c\right)}.$$

Anmerkung. Den Wert für x erhält man auch unmittelbar nach § 119 aus der Gleichung $c^2 = a^2 + b^2 - 2ax$.

5) Aus den vier Seiten eines Trapezes den Flächeninhalt F zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnet man die größere der beiden parallelen Seiten mit a, die kleinere mit b, die anderen mit c und d, und teilt das Trapez durch eine Parallele zu der einen der nicht parallelen Seiten in ein Parallelogramm und ein Dreieck, so kennt man die Seiten dieses Dreiecks, also nach 4) seine Höhe, die zugleich die des Trapezes ist.

Man findet $F = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{S}{2}\left(\frac{S}{2}-c\right)\left(\frac{S}{2}-d\right)\left(\frac{S}{2}-(a-b)\right)}$,
wenn unter S verstanden wird $a - b + c + d$.

6) Aus zwei Seiten eines Dreiecks a und b und der Transversale t nach der dritten c diese letztere und F zu finden.

Auflösung. Aus § 120 ergibt sich $c = \sqrt{2(a^2 + b^2 - 2t^2)}$.

Um F zu finden, verlängere man t um sie selbst und verbinde den Endpunkt mit einem der freien Punkte; so entstehen zwei nach § 44 kongruente Dreiecke, und es ist F gleich dem Dreieck, dessen Seiten a, b und $2t$ sind, also

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + 2t)(a + b - 2t)(a + 2t - b)(b + 2t - a)}.$$

7) Aus den drei Transversalen eines Dreiecks α, β und γ die Seiten und den Flächeninhalt F zu berechnen.

Auflösung. Nach § 146 ist im $\triangle ABH$ bekannt $AH = \frac{2}{3}AE = \frac{2}{3}\alpha$, $BH = \frac{2}{3}BD = \frac{2}{3}\beta$ und $FH = \frac{1}{3}\gamma$, also AB und $\triangle ABH$ nach voriger Aufgabe leicht zu finden.

Es ist aber $F = 3\triangle ABH$, also

$$= 3\cdot\tfrac{1}{4}\sqrt{(\tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{2}{3}\gamma)(\tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{2}{3}\beta - \tfrac{2}{3}\gamma)(\tfrac{2}{3}\alpha + \tfrac{2}{3}\gamma - \tfrac{2}{3}\beta)(\tfrac{2}{3}\beta + \tfrac{2}{3}\gamma - \tfrac{2}{3}\alpha)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\alpha + \gamma - \beta)(\beta + \gamma - \alpha)}$$

$$= \tfrac{1}{3}\sqrt{\Sigma(\Sigma - 2\alpha)(\Sigma - 2\beta)(\Sigma - 2\gamma)},$$

wenn man unter Σ versteht $\alpha + \beta + \gamma$.

Anmerkung. Der Inhalt jedes Dreiecks verhält sich also zum Inhalt desjenigen Dreiecks, dessen Seiten die Transversalen des ersten sind, wie 4 : 3.

8) Die Seiten und die Fläche eines Dreiecks durch seine drei Höhen zu bestimmen.

Auflösung. Wenn h, h', h'' die zu den Seiten a, b, c gehörigen Höhen sind, so ist nach § 147 $ah = bh'$ und $ah = ch''$.

Trägt man nun für b und c ihre aus jenen Gleichungen entnommenen Werte in die Gleichung

$$\frac{ah}{2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)}$$

ein und löst diese Gleichung in Bezug auf a auf, so findet man

$$a = \frac{2hh'^2h''^2}{\sqrt{S\cdot(S - 2hh')(S - 2hh'')(S - 2h'h'')}},$$

wenn man unter S versteht $hh' + h'h'' + hh''$.

Die Ausdrücke für b und c sind dem für a analog und

$$F = \frac{(h'hh'')^2}{\sqrt{S(S - 2hh')(S - 2hh'')(S - 2h'h'')}}.$$

9) Die Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks zu berechnen, wenn die Höhe h auf die Hypotenuse c und der Flächeninhalt F gegeben ist.

Auflösung. Aus $F = \frac{ch}{2}$ folgt $c = \frac{2F}{h}$; außerdem ist $a^2 + b^2 = c^2 = \frac{4F^2}{h^2}$, die Aufgabe also auf die dritte dieses Paragraphen zurückgeführt.

10) Die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks zu finden, wenn s die Summe seiner Katheten, und h, die Höhe auf die Hypotenuse, gegeben ist.

Auflösung. Bezeichnet man die eine Kathete mit x, die andere also mit $s - x$, und die Hypotenuse mit y, so ist

$$x^2 + (s - x)^2 = y^2 \text{ und } x(s - x) = hy$$
$$\text{oder } 2x(s - x) = 2hy.$$

Eliminiert man nun x durch Addition der ersten und dritten Gleichung, so erhält man $y^2 + 2hy = s^2$,

$$y = -h + \sqrt{s^2 + h^2} \text{ und}$$

$$\text{jede der Katheten} = \frac{s}{2} \pm \sqrt{\frac{s^2}{4} - hy}.$$

Anmerkung. In ähnlicher Weise löst man die Aufgaben:

Aus der Hypotenuse und der Summe oder der Differenz der Katheten diese letzteren zu bestimmen.

Aus der Summe der beiden Katheten und der Summe der Hypotenuse und der Höhe auf sie die Seiten zu berechnen.

Aus dem Umring und dem Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks seine Seiten zu berechnen usw.

11) Eine gegebene gerade Linie a durch Rechnung harmonisch zu teilen, wenn der erste Teil b gegeben ist.

Auflösung. Aus der Proportion $b : x = a : a - b - x$ (§ 145) findet man x, den zweiten Teil, $= \frac{(a - b)b}{a + b}$.

Man sieht hieraus, daß die Aufgabe in § 145, trotz einiger Unbestimmtheit in der Lösung, vollkommen bestimmt ist.

12) Eine gegebene gerade Linie a durch Rechnung stetig zu teilen.
Die Auflösung ist in § 143, Aufgabe 1, 4 enthalten.

13) Den Radius ϱ des in ein Dreieck beschriebenen Kreises durch seine drei Seiten a, b und c auszudrücken.

Auflösung. Bezeichnet man in Fig. 51 die Seiten des Dreiecks ABC

nach den Gegenwinkeln mit a, b, c, den Flächeninhalt mit F und die Senkrechten DE, DF und DG mit ϱ, so ist

$$F = \frac{a\varrho}{2} + \frac{b\varrho}{2} + \frac{c\varrho}{2} = \frac{(a+b+c)\varrho}{2}\text{, demnach}$$

$$\varrho = \frac{2F}{a+b+c} \text{ oder}$$

$$= \frac{\sqrt{\tfrac{1}{2}s(\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)}}{\tfrac{1}{2}s} = \sqrt{\frac{(\tfrac{1}{2}s-a)(\tfrac{1}{2}s-b)(\tfrac{1}{2}s-c)}{\tfrac{1}{2}s}}$$

Anmerkung. Halbiert man die beiden Winkel, welche die Seite a mit den Verlängerungen von b und c bildet, so gelangt man offenbar zum Mittelpunkt des diese drei Linien berührenden Kreises. Der Radius (ϱ') dieses zur Seite a gehörigen äußeren Berührungskreises ergibt sich, wenn man in voriger Entwicklung das zu a gehörige Dreieck negativ nimmt, nämlich $\varrho' = \frac{2F}{b+c-a} = \frac{2F}{s-2a}$, und dem analog die Radien der beiden anderen äußeren Berührungskreise

$$\varrho'' = \frac{2F}{s-2b},\ \varrho''' = \frac{2F}{s-2c}\text{, folglich}$$

$$\varrho\cdot\varrho'\cdot\varrho''\cdot\varrho''' = \frac{16F^4}{s(s-2a)(s-2b)(s-2c)}\text{, d. i. } = F^2,$$

mithin $F = \sqrt{\varrho\cdot\varrho'\cdot\varrho''\cdot\varrho'''}$.

14) Den Radius r des um ein Dreieck beschriebenen Kreises durch seine drei Seiten a, b und c auszudrücken.

Auflösung. Zieht man in Fig 50 von C aus einen Durchmesser, verbindet seinen Endpunkt mit A und fällt aus A die Senkrechte h auf a oder deren Verlängerung, so erhält man zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke (nach § 93, 1 und 2), in welchen

$$2r : b = c : h,\quad h = \frac{2F}{a},$$

$$\text{folglich } r = \frac{abc}{4F} = \frac{abc}{\sqrt{s(s-2a)(s-2b)(s-2c)}}.$$

15) Aus den beiden Grundlinien a und b eines geraden Trapezes und seiner Höhe h den Radius des umschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die Entfernung der einen Grundlinie vom Mittelpunkt mit x, die der anderen demnach mit h − x (oder h + x),

stellt darauf r^2 doppelt dar und eliminiert x, so ergibt sich

$$r = \frac{\sqrt{a^2h^2 + (\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 + h^2)^2}}{2h}.$$

16) Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b und c die Radien der Kreise zu berechnen, welche aus seinen Winkelpunkten dergestalt beschrieben sind, daß sich je zwei berühren.

Auflösung. Der Radius des aus A beschriebenen Kreises ist, wenn A der Seite a gegenüber liegt, $= \frac{1}{2}(b + c - a)$.

Welches sind die Werte der beiden anderen Radien?

17) Eine gegebene gerade Linie a in zwei Teile so zu teilen, daß das aus ihnen, als Winkelseiten, gebildete Rechteck das größtmögliche (ein Maximum) werde.

Auflösung. Nimmt man an, daß für ein beliebiges dieser Rechtecke der Teilpunkt von dem Mittelpunkte der a um x entfernt sei,

so sind ihre Teile $\frac{a}{2} + x$ und $\frac{a}{2} - x$, also

$$\text{das Obl.} = \left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

Dieser Wert wird aber um so größer, je kleiner x, und am größten, wenn $x = 0$ angenommen wird, d. h. wenn der Teilpunkt mit dem Mittelpunkte zusammenfällt.

Das größte Rechteck ist also das Quadrat über $\frac{a}{2}$.

18) Unter allen Dreiecken, deren Grundlinie $= b$, deren Umfang $= b + s$ ist, das größtmögliche zu berechnen.

Auflösung. Angenommen, die Seiten, deren Summe $= s$ ist, seien ungleich, die eine $= \frac{s}{2} + x$, die andere $= \frac{s}{2} - x$: so ist

$$\begin{aligned} F &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(b + s)(s - b)(b - 2x)(b + 2x)} \\ &= \tfrac{1}{4}\sqrt{(s^2 - b^2)(b^2 - 4x^2)}. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck wird für $x = 0$ ein Maximum.

Das größtmögliche Dreieck ist also das gleichschenklige, und zwar

$$= \frac{b}{4}\sqrt{s^2 - b^2}.$$

Anmerkung. Hieraus geht sofort hervor, daß *unter allen Dreiecken von gleichem Umfang das gleichseitige das größte ist.*

Denn hätte dieses Maximum irgend zwei ungleiche Seiten, so ließe sich ja über der dritten ein gleichschenkliges Dreieck desselben Umfanges konstruieren, welches größer als das Maximum wäre.

Durch Rechnung kommt man zu dem erwähnten Resultate folgendermaßen:

Da das Maximum zunächst ein gleichschenkliges Dreieck sein muß, so wird, wenn sein Umring $= 3a$ angenommen und seine Basis mit x bezeichnet wird, sein Flächeninhalt $= \frac{1}{4}\sqrt{3a(3a-2x)x^2}$ sein. Ist nun $x = a + \delta$, so ergibt sich $F = \frac{1}{4}\sqrt{3a(a^3 - (3a + 2\delta)\delta^2)}$, was offenbar für $\delta = 0$ ein Maximum wird, nämlich $= \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$.

Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

§ 167.

Die Anwendung der Algebra auf geometrische Aufgaben ist auch dann zulässig und zuweilen sehr zweckmäßig, sogar unentbehrlich, wenn die bekannten Bestimmungen der Aufgabe (Linien, Winkel und Flächen) nicht in Zahlen, sondern durch Zeichnung gegeben sind, und das Resultat ebenfalls durch Zeichnung dargestellt werden soll.

Man hat in diesem Falle die durch Rechnung gewonnenen algebraischen Ausdrücke zu konstruieren.

Die einfachsten Formeln, auf welche alle solche Ausdrücke zurückgeführt werden können, sind die folgenden, in welchen a, b, c gerade Linien bedeuten:

$x = a + b$ ist die Summe zweier Linien,

$x = a - b$ die Differenz zweier Linien,

$x = \frac{ab}{c}$ die vierte Proportionale zu c, a und b }
$x = \frac{a^2}{b}$ die dritte Proportionale zu b und a } § 139, Aufg.,

$x = \sqrt{ab}$ die mittlere Proportionale zwischen a und b (§ 143, 1),

$x = \sqrt{a^2 + b^2}$ die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten a und b sind,

$x = \sqrt{a^2 - b^2}$ die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse a, und dessen andere Kathete b ist.

Der öfter wiederkehrende Ausdruck $a\sqrt{m}$, in welchem m eine unbenannte Zahl bedeutet, ist die mittlere Proportionale zwischen a und ma; denn es ist $a\sqrt{m} = \sqrt{m \cdot a^2} = \sqrt{ma \cdot a}$.

Anmerkung. Nur selten gelangt man zu komplizierteren Ausdrücken, welche unmittelbar eine bestimmte geometrische Bedeutung haben und eine einfachere Darstellung zulassen, als die Zurückführung auf die erwähnten Formen ergibt. Dergleichen sind

$\sqrt{a^2 + b^2 + 2ac}$ (§ 110),

$\sqrt{2(a^2 + b^2 - 2c^2)}$ (§ 120 oder 166, 6),

$\frac{a}{2}\sqrt{3}$ (§ 166, 3),

$\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$ (§ 166, 12),

$\frac{2F}{a + b + c}$ (§ 166, 13) usw.

§ 168.

In vielen Fällen beruht die rein geometrische Lösung der Aufgaben auf denselben Konstruktionen, welche die durch Rechnung gefundene Formel involviert, wie z. B. in der Aufgabe 3 des § 143.

Bezeichnet man nämlich mit g und h die Grundlinie und Höhe des gegebenen ungleichseitigen, mit x und y die gleichnamigen Bestimmungen des verlangten gleichseitigen Dreiecks,

$$\text{so ist } \frac{gh}{2} = \frac{xy}{2}, \text{ also}$$

$$gh = \frac{x^2\sqrt{3}}{2} \text{ und } x = \sqrt{\frac{2gh}{\sqrt{3}}},$$

$$\text{demnach } y = \sqrt{\frac{gh\sqrt{3}}{2}}.$$

Nun ist $\frac{g\sqrt{3}}{2}$ die Höhe eines über g konstruierten gleichseitigen Dreiecks und y die mittlere Proportionale zwischen dieser Höhe und h, der Höhe des gegebenen Dreiecks.

Dasselbe gilt auch von Aufgabe 12 in § 166, sowie von der folgenden:

Zu den Seiten a, b und c eines Dreiecks F in gleicher Entfernung die Parallelen α, β und γ so zu legen, daß das von ihnen gebildete Dreieck f das m fache des gegebenen ist.

Algebraische Auflösung. Verbindet man die homologen Winkelpunkte beider Dreiecke, bezeichnet die gesuchte Höhe der entstehenden Trapeze mit h, die Umringe beider Dreiecke mit S und Σ, und nimmt an $m < 1$, so ist

$$F - f = \left(\frac{a+\alpha}{2}\right)h + \left(\frac{b+\beta}{2}\right)h + \left(\frac{c+\gamma}{2}\right)h$$
$$= \frac{(S+\Sigma)h}{2},$$

also, da $f = mF$ und $S : \Sigma = 1 : \sqrt{m}$,

$$F(1 - m) = \frac{S(1+\sqrt{m})h}{2},$$

folglich $h = \frac{2F(1-\sqrt{m})}{S}$, und nach § 166, 13

$$= \varrho(1 - \sqrt{m}) = \varrho - \varrho\sqrt{m}.$$

Die Konstruktion dieser Formel erhellt aus § 167.

Für den Fall $m > 1$ wird h negativ, also $= \varrho\sqrt{m} - \varrho$.

Ihre geometrische Lösung beruht auf § 139, § 138 Anmerkung und § 143, Aufg. 4.

Bei manchen Aufgaben (z. B. 6, 7, 8 und 15 in § 166) ist die rein geometrische Auflösung viel einfacher und leichter, bei anderen (z. B. 10 und 16 in § 166), wenn überhaupt schon gelungen, bedeutend schwieriger als die Konstruktionen, welche die algebraische Lösung erfordert.

Anhang.

Zur Lösung geometrischer Aufgaben, welche nicht unmittelbar auf einen einzelnen Satz zurückgehen, bedient man sich mit Vorteil der analytischen Methode. Diese besteht darin, daß man die Aufgabe als gelöst annimmt, eine ihren Bedingungen etwa entsprechende Figur zeichnet, die in dieser noch nicht dargestellten gegebenen Bestimmungen darstellt und durch Konstruktion (durch Verbindung von Punkten, durch Senkrechte, Parallelen, Tangenten ꝛc.) zu einer aus den gegebenen Stücken konstruierbaren Figur zu gelangen sucht, welche mit der vorläufig als gefunden angenommenen in einer angebbaren Beziehung steht.

Zur näheren Erläuterung dieses Verfahrens mögen folgende Aufgaben dienen:

I) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem die Summe S der drei Seiten und zwei Winkel α und β gegeben sind.

Fig. 133. Analysis. Angenommen, $\triangle ABC$ sei das verlangte, d. h. $\angle A = \alpha$ und $\angle B = \beta$: so stelle man S dar, indem man AB um $AD = AC$ und um $BE = BC$ verlängert, und ziehe DC und EC; dann ist $\triangle DEC$ konstruierbar nach § 61, V; denn es ist $DE = S$, $\angle D = \frac{1}{2}\alpha$ und $\angle E = \frac{1}{2}\beta$ nach § 53. Vom Dreieck DCE aber gelangt man zum Dreieck ABC durch Abschneidung der gleichschenkligen Dreiecke DCA und ECB.

Synthetische Lösung. Man zeichne demnach aus der Linie S und den anliegenden Winkeln $\frac{1}{2}\alpha$ und $\frac{1}{2}\beta$ das Dreieck DEC, trage in C den $\angle D$ an CD und $\angle E$ an CE an und verlängere die freien Schenkel, bis sie DE treffen.

Der Beweis liegt in der Analysis.

II) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite a, der Summe S der beiden anderen Seiten und einem an der ersten anliegenden Winkel β.

Fig. 134. Analysis. Ist ABC das verlangte Dreieck, d. h. $AB = a$, $\angle A = \beta$ und $AC + CB = S$, und verlängert man AC um CB bis D und zieht BD, so ist Dreieck ABD konstruierbar nach § 61, IV, demnach auch $\triangle ABC$, wenn man das gleichschenklige Dreieck BDC abschneidet.

Die synthetische Lösung und der Beweis sind hieraus leicht zu entnehmen.

III) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite a, der Differenz d der beiden anderen und dem an der ersten anliegenden Winkel β.

Fall 1. Winkel β liegt der kleineren der beiden Seiten gegenüber. Fig. 135.

Analysis. Es sei $\triangle ABC$ das verlangte, d. h. $AB = a$, $\angle A = \beta$ und $AC - CB = d$; so ist, wenn man CB auf CA von A aus abschneidet und DB zieht, $\triangle ABD$ konstruierbar nach § 61, IV, mithin auch $\triangle ABC$.

Das Dreieck ist unmöglich, wenn $\triangle ABD$ nicht bei D stumpfwinklig ist.

Fall 2. Winkel β liegt der größeren Seite gegenüber.

Analysis. Verlängert man Seite CA des Dreiecks ABC, bis $CD = CB$ ist, und zieht DB, so ist $\triangle DAB$ konstruierbar aus DA, AB und $\angle DAB = 2R - \beta$, mithin auch, wenn man $\angle D$ an DB in B anträgt, das Dreieck ABC. Fig. 136.

Synthetische Auflösung und Beweis sind leicht.

IV) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn eine seiner Seiten a, die Summe S der beiden anderen und der von diesen eingeschlossene Winkel α gegeben ist.

Analysis. Wenn im Dreieck ABC Seite $AB = a$, $\angle ACB = \alpha$ und $AC + CB = S$ ist, und man AC um CB bis D verlängert und BD zieht, so ist $\triangle ABD$ aus zwei Seiten und dem Gegenwinkel der kleineren konstruierbar, mithin auch ABC. Fig. 137.

Anmerkung. Wenn die Aufgabe überhaupt lösbar, d. h. $\triangle ABD$ konstruierbar ist, so schließt die Auflösung, einen speziellen Fall ausgenommen (nach § 61, VII, Anmerk. 2), eine Unbestimmtheit in sich ein. Man erhält aber, wenn man $\triangle AB'D$ statt ABD nimmt, ein dem $\triangle ABC$ kongruentes Dreieck $AB'C'$. Es ist nämlich $AB = AB'$, $\angle C = C'$ nach § 27, 1 und $\angle ABC = C'AB'$, weil sie mit denselben Winkeln $2R$ betragen, $\angle ABC$ mit CBD und ABB', und $\angle C'AB'$ mit B' und D.

V) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite a, der Differenz d der beiden anderen und dem von diesen eingeschlossenen Winkel α.

Analysis. Schneidet man im $\triangle ABC$ Seite CB auf AC ab und zieht DB, so ist Fig. 138.

$$\angle CDB = \frac{2R - \alpha}{2} = R - \frac{\alpha}{2}, \text{ also } \angle ADB = R + \frac{\alpha}{2};$$

außerdem ist im Dreieck ABD Seite $AB = a$, $AD = d$, also Dreieck ABD nach § 61, VII, mithin auch Dreieck ABC konstruierbar.

Übungsaufgaben.

1) Zu beweisen, daß die Halbierungslinien zweier Nebenwinkel aufeinander senkrecht stehen.

2) Zu beweisen, daß, wenn man auf den Schenkeln eines Winkels im Scheitel nach außen Perpendikel errichtet, der von ihnen gebildete Winkel das Supplement des ersten ist.

3) Zu beweisen, daß vier gleiche anstoßende Winkel, welche um einen Punkt herum liegen, Scheitelwinkel bilden.

4) In einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden, der von zwei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

5) In einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt so zu bestimmen, daß die Linien, welche ihn mit zwei gegebenen Punkten verbinden, gegen die erste gleich geneigt sind.

6) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite, ein anliegender Winkel und die Halbierungslinie dieses Winkels (bis zur Gegenseite) gegeben ist.

7) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, dem einen anliegenden Winkel und der Transversale nach der gegebenen Seite.

Ist die Aufgabe immer vollkommen bestimmt und immer lösbar?

8) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer Seite, der Transversale nach dem gegenüber liegenden Winkelpunkte und der Höhe aus diesem.

9) Ein Dreieck zu konstruieren, wenn ein Winkel und die Transversale und die Höhe aus einem anderen Winkel gegeben sind.

Ist die Aufgabe immer vollkommen bestimmt?

10) In einem gegebenen Dreieck zu einer Seite eine Parallele so zu ziehen, daß sie gleich der Summe der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist.

11) Eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie überall in der Mitte zwischen zwei gegebenen konvergenten Linien liegt — ohne diese letzteren bis zum Durchschnittspunkte zu verlängern.

12) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem ein Winkel und die Summe oder die Differenz zweier ungleichen Seiten gegeben ist.

13) Ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, von welchem die Summe oder die Differenz von Seite und Höhe gegeben ist.

14) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und der Höhe aus diesem Winkel.

15) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem gegenüber liegenden Winkel und der Transversale aus diesem Winkel.

16) Durch den einen Durchschnittspunkt zweier sich schneidenden Kreise eine Sekante zu ziehen, so daß zu den entstehenden Sehnen gleiche Zentriwinkel gehören.

17) Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte berührt.

18) Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines gegebenen Kreises an diesen eine Tangente zu legen.

19) In der Verlängerung eines gegebenen Durchmessers einen Punkt der Art zu finden, daß die von ihm an den Kreis gezogene Tangente gleich einer gegebenen geraden Linie ist.

20) Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines gegebenen Kreises in ihn eine Sekante so zu ziehen, daß der innere Abschnitt derselben gleich einer gegebenen geraden Linie wird.

21) Durch einen gegebenen Punkt innerhalb eines gegebenen Kreises eine gegebene Linie als Sehne einzutragen.

22) In einer der Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt dergestalt zu bestimmen, daß, wenn man von ihm nach einem gegebenen Punkte eine gerade Linie und an einen gegebenen Kreis eine Tangente zieht, beide Linien gegen die gegebene gleich geneigt sind.

23) In einen gegebenen Kreis ein Dreieck einzuzeichnen, das mit einem gegebenen Dreieck gleichwinklig (also ihm ähnlich) ist.

24) Zu zwei gegebenen Kreisen die gemeinschaftliche Tangente zu ziehen.

25) In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge so einzutragen, daß ihre Verlängerung einen anderen gegebenen Kreis berührt.

26) Durch den einen Durchschnittspunkt zweier gegebenen Kreise eine gerade Linie zu ziehen, so daß die Summe der entstehenden Sehnen gleich einer gegebenen geraden Linie wird.

27) Einen Kreis zu zeichnen, der durch einen gegebenen Punkt geht und einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt.

28) Einen Kreis zu zeichnen, der eine gegebene gerade Linie in einem gegebenen Punkte und einen gegebenen Kreis berührt.

29) Einen Kreis zu zeichnen, der einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte und eine gegebene gerade Linie berührt.

30) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Kreise, den einen in einem gegebenen Punkte berührt.

31) In einen gegebenen Kreis eine Sehne von gegebener Länge so einzutragen, daß sie eine gegebene Sehne in einem gegebenen Verhältnisse teilt.

32) Durch den einen Durchschnittspunkt zweier Kreise eine gerade Linie zu legen, so daß die entstehenden Sehnen einander gleich sind.

33) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem ein Winkel, die Höhe aus ihm und das Verhältnis gegeben ist, in welchem diese Höhe die Gegenseite teilt.

34) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite, ihr Gegenwinkel und das Verhältnis gegeben ist, in welchem die Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird.

35) Zu beweisen, daß die Linien, welche die Mitten der vier Seiten eines Vierecks der Reihe nach verbinden, ein Parallelogramm bilden, welches die Hälfte des Vierecks ist.

36) Ein Dreieck zu zeichnen aus seinen drei Transversalen.

37) Ein Dreieck aus seinen drei Höhen zu zeichnen.

38) Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem ein Winkel und die Summe oder Differenz zweier ungleichen Höhen gegeben ist.

39) In einem gegebenen Dreieck zu einer Seite eine Parallele so zu legen, daß diese Seite gleich der Summe der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist.

40) Zu beweisen, daß der Schwerpunkt eines Dreiecks in gerader Linie zwischen dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises und dem Durchschnittspunkte der Höhen, und zwar doppelt so weit vom letzteren als vom ersteren entfernt liegt.

41) In ein gegebenes Dreieck ein Quadrat so einzuzeichnen, daß zwei Winkelpunkte in einer Seite, die anderen in den beiden anderen Seiten liegen.

42) In ein gegebenes Quadrat ein gleichseitiges Dreieck so einzuzeichnen, daß seine drei Winkelpunkte in den vier Seiten des Quadrates liegen.

43) Einen Kreis zu zeichnen, der durch zwei gegebene Punkte geht und eine gegebene gerade Linie berührt.

44) Einen Kreis zu zeichnen, welcher die Schenkel eines gegebenen Winkels berührt und durch einen gegebenen Punkt innerhalb derselben hindurchgeht.

45) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene Parallelen und einen gegebenen Kreis berührt.

46) Einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene nicht parallele Linien und einen gegebenen Kreis berührt.

47) Einen Punkt der Art zu finden, daß die von ihm an zwei gegebene Kreise gezogenen Tangenten gleich zwei gegebenen Linien sind.

48) An zwei gegebene Kreise von einem Punkte außerhalb Tangenten zu ziehen, deren Winkel einem gegebenen gleich ist und durch eine Senkrechte auf die Zentrallinie halbiert wird.

49) Ein Viereck zu konstruieren, von welchem drei Seiten und die Winkel an der vierten gegeben sind.

50) Einen Punkt der Art zu finden, daß die von ihm an zwei gegebene Kreise gelegten Tangenten einen gegebenen Winkel einschließen und zusammen gleich einer gegebenen Linie sind.

Anmerkung. Statt der Summe der Tangenten kann auch ihre Differenz oder eine von beiden gegeben sein.

51) Zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks durch eine gerade Linie so zu teilen, daß diese Linie gleich jedem der beiden unteren Abschnitte ist, also ein Viereck mit drei gleichen Seiten entsteht.

52) Aus einer Seite eines Vierecks, der Summe der anderen und den Winkeln des Vierecks dasselbe zu konstruieren.

53) Ein Viereck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis der übrigen und den an der ersten Seite anliegenden Winkeln.

54) Zu beweisen, daß in einem Viereck im Kreise das Rechteck aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten ist. (Der Ptolemäische Lehrsatz.)

55) Die Seite des regulären Fünfzehnecks durch Rechnung zu finden.

56) Zu beweisen, daß das aus der Seite des regulären Zehnecks, der Seite des regulären Fünfecks und ihrem gemeinschaftlichen größten Radius gebildete Dreieck ein rechtwinkliges ist.

Nachtrag zu den Übungsaufgaben.

a. Zu beweisende Sätze.

1†) Jede Seite einer geradlinigen Figur ist kleiner als der halbe Perimeter der Figur.

2†) Wenn man einen Punkt innerhalb eines Dreiecks mit den Winkel punkten verbindet, so ist die Summe der Verbindungslinien größer als der halbe Perimeter, aber kleiner als der ganze.

3†) Wenn man über einer geraden Linie zwei Polygone zeichnet, von denen das eine ganz innerhalb des anderen liegt und keinen konvexen Winkel hat, so ist der Perimeter des inneren Polygons kleiner als der des äußeren.

4†) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Höhen auf die beiden Schenkel (s. § 111, Erklär.) einander gleich, und die Linie, welche die Fußpunkte jener Höhen verbindet, ist der Basis parallel.

5†) Wenn in einem Dreieck zwei Höhen gleich sind, so ist das Dreieck gleichschenklig.

6†) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Halbierungslinien der Basiswinkel (bis zu den Schenkeln gerechnet) einander gleich.

7†) Im gleichschenkligen Dreieck sind die Transversalen (s. § 66, Erklär.) nach den Schenkeln einander gleich.

8†) Wenn man in einem gleichseitigen Dreieck von den Winkelpunkten aus auf den Seiten in derselben Richtung beliebige, aber gleiche Stücke

abschneidet und die erhaltenen Punkte verbindet, so entsteht wiederum ein gleichseitiges Dreieck.

9†) Wenn man auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von jedem ihrer Endpunkte aus die anliegende Kathete abträgt und die freien Punkte verbindet, so ist der Winkel der Verbindungslinien = ½R. Trägt man die Katheten an die Hypotenuse an und verbindet die freien Punkte, so ist der Winkel der Verbindungslinien = 1½R.

10†) Wenn in einem Dreieck die Halbierungslinie eines Winkels die Gegenseite halbiert, so ist das Dreieck gleichschenklig.

11†) Wenn man die Basis eines gleichschenkligen Dreiecks in drei gleiche Teile teilt und die Teilpunkte mit der Spitze verbindet, so teilen die Verbindungslinien den Winkel an der Spitze *nicht* in drei gleiche Teile.

12†) In jedem Dreieck ist die Summe seiner Höhen kleiner als sein Umring.

13†) Im ungleichseitigen Dreieck ist die Summe der Höhen kleiner als die Summe der Transversalen.

14†) Wenn die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks halb so groß als die Hypotenuse ist, so ist ihr Gegenwinkel halb so groß als der Gegenwinkel der anderen Kathete — und umgekehrt.

15†) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck aus einem beliebigen Punkte der Basis Parallelen zu den Schenkeln legt, so ist ihre Summe gleich einem der Schenkel.

16†) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck aus einem beliebigen Punkte der Basis auf die Schenkel Senkrechte fällt, so ist ihre Summe gleich der zu einem Schenkel gehörigen Höhe.

17†) Wenn man von einem beliebigen Punkte innerhalb eines gleichseitigen Dreiecks auf die drei Seiten Perpendikel fällt, so ist ihre Summe gleich der Höhe des Dreiecks.

18†) Wenn in einem Dreieck die Linie, welche die Fußpunkte zweier Höhen verbindet, der dritten Seite parallel ist, so ist das Dreieck gleichschenklig.

19†) Wenn man in einem Dreieck von der Mitte einer Seite Parallelen zu den beiden anderen zieht, so ist die Summe der entstehenden Dreiecke gleich der Hälfte des gegebenen; ist der Punkt nicht die Mitte, so ist die Summe der kleineren Dreiecke größer als die Hälfte des ganzen.

20†) Wenn man auf jeder Seite eines Quadrats von beiden Endpunkten aus die halbe Diagonale abträgt, so sind die erhaltenen Punkte die Winkelpunkte eines regulären Achtseits.

21†) Wenn zwei Sehnen einander innerhalb eines Kreises schneiden, so ist jeder der entstehenden Winkel gleich der Summe der beiden Peripheriewinkel, welche auf seinem und seines Scheitelwinkels Bogen stehen.

Wie ist es, wenn die Sehnen sich in der Verlängerung treffen? wie, wenn eine Tangente und eine Sekante sich außerhalb des Kreises treffen?

22†) Die zwischen zwei parallelen Sehnen liegenden Bogen eines Kreises sind einander gleich.

23†) Wenn man von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beliebig Sehnen zieht, so liegen alle ihre Mitten in der Peripherie eines Kreises.

24†) Wenn man von dem einen Durchschnittspunkte zweier einander schneidenden Kreise in ihnen Durchmesser zieht, so liegen die Endpunkte derselben mit dem anderen Durchschnittspunkte in einer geraden Linie.

25†) Wenn man in einen Kreis ein Sechseck so einzeichnet, daß die erste und vierte, und die zweite und fünfte Seite parallel sind, so ist auch die dritte der sechsten parallel.

26†) Wenn man die Winkelpunkte eines gleichseitigen Dreiecks mit einem beliebigen Punkte in der Peripherie des umschriebenen Kreises verbindet, so ist diejenige Verbindungslinie, welche zwischen den beiden anderen liegt, gleich der Summe dieser beiden anderen.

27†) Wenn man von einem Punkte in der Peripherie eines Kreises auf die Seiten eines beliebig in ihn einbeschriebenen Dreiecks (oder deren Verlängerungen) Perpendikel fällt, so liegen ihre Fußpunkte in einer geraden Linie.

28†) In jedem einem Kreise einbeschriebenen Polygon (Sehnenviereck) von gerader Seitenzahl ist die Summe des 1ten, 3ten, 5ten usw. Winkels gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten usw.

29†) In jedem einem Kreise umschriebenen Polygon (Tangentenviereck) von gerader Seitenzahl ist die Summe der 1ten, 3ten, 5ten usw. Seite gleich der Summe der übrigen

30†) Die Summe der Außenwinkel eines Polygons, welches keinen konvexen Winkel hat, ist $= 4R$. Für jeden konvexen Winkel, den das Polygon hat, kommen zu jener Summe noch $4R$ hinzu wenn man als Außenwinkel eines konvexen Polygonwinkels den konvexen Winkel nimmt, der von der einen Seite und der Verlängerung der anstoßenden gebildet wird.

31†) Jedes Polygon muß mindestens drei konkave Winkel haben.

32†) Wenn man einen beliebigen Punkt innerhalb eines Parallelogramms mit den Winkelpunkten verbindet, so sind die Summen der nicht benachbarten Dreiecke einander gleich.

33†) Wenn die eine Diagonale eines Vierecks die andere halbiert, so halbiert sie das Viereck.

34†) Wenn die Diagonalen eines Vierecks einander senkrecht schneiden, so sind die Summen der Quadrate der Gegenseiten einander gleich und die Quadrate der Diagonal-Abschnitte zusammen halb so groß als die Summe der Quadrate der vier Seiten.

35†) Wenn zwei Kreise, von denen der eine einen noch einmal so großen Durchmesser hat als der andere, einander von innen berühren, so

werden alle vom Berührungspunkt aus gezogenen Sehnen des größeren Kreises von der Peripherie des kleineren halbiert.

36†) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basis größer als jeder der beiden Schenkel ist, die Schenkel von den Endpunkten der Basis aus auf ihr abträgt und die freien Punkte verbindet, so ist jede der Verbindungslinien die mittlere Proportionale zwischen dem mittleren Teile der Basis und dem Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks.

37†) Wenn man in einem gleichschenkligen Dreieck, dessen Basiswinkel kleiner als der Winkel an der Spitze ist, den ersten vom zweiten von dem einen Schenkel aus abschneidet, so ist jeder Schenkel des gegebenen Dreiecks die mittlere Proportionale zwischen seiner Basis und dem Schenkel des kleineren gleichschenkligen Dreiecks.

Anmerkung. Aus den beiden letzten Sätzen ergeben sich offenbar zwei sehr einfache Methoden für Auffindung der mittleren Proportionale zweier Linien.

38†) Die Höhen eines Dreiecks halbieren die Winkel, welche durch Verbindung der Fußpunkte der Höhen entstehen.

Diese Aufgabe konnte auch schon bei Nr. 27 und 28 ihre Stelle haben.

39†) Wenn in ein Dreieck ein anderes so einbeschrieben ist, daß seine Winkelpunkte in den Seiten des ersten liegen, und diesem zweiten Dreieck in gleicher Weise ein drittes einbeschrieben ist, dessen Seiten denen des ersten parallel sind, so bilden die drei Dreiecke eine stetige geometrische Proportion.

b. Konstruktionsaufgaben.

Erklärung. Unter dem geometrischen Ort eines Punktes versteht man diejenige Linie, deren Punkte sämtlich, und zwar mit Ausschluß aller übrigen, einer gegebenen Bedingung genügen.

40†) Den geometrischen Ort eines Punktes zu finden, welcher entweder von einem gegebenen Punkte (§ 35, Folg. 1),
oder von einer gegebenen geraden Linie (§ 72, Folg.),
oder von der Peripherie eines gegebenen Kreises (§ 85, Anm.)
} eine gegebene Entfernung hat,

oder von zwei gegebenen Punkten (§ 65, 4),
oder von zwei gegebenen geraden Linien (§ 63, VIII)
oder von den Peripherien zweier gegebenen konzentrischen Kreise*)
} gleich weit entfernt ist.

*) Der geometrische Ort für einen Punkt, welcher entweder von einer gegebenen geraden Linie und einem gegebenen Punkte oder der Peripherie eines gegebenen Kreises, oder von der Peripherie eines gegebenen Kreises und einem gegebenen Punkte — innerhalb oder außerhalb des Kreises —, oder von den Peripherien zweier gegebenen Kreise gleich weit entfernt ist, gehört nicht der niederen Planimetrie an; er ist nämlich ein sogenannter Kegelschnitt, und zwar resp. eine Parabel, oder eine Ellipse, oder eine Hyperbel.

Kombiniert man diese Aufgaben paarweise, so ergeben sich 10 Aufgaben, welche die Lage des Punktes entweder vollständig (eindeutig), oder doppeldeutig, d. h. so bestimmen, daß nur 2 Punkte den Bedingungen der Aufgabe entsprechen.

Trägt man die beiden ersten Aufgaben auf das Dreieck über, so hat man die Aufgaben:

Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem die Grundlinie und entweder die zu ihr gehörige Transversale oder die zugehörige Höhe gegeben ist.

41†) Den geometrischen Ort für die Spitze eines Dreiecks zu finden, von welchem die Grundlinie und der Winkel an der Spitze gegeben ist.

(Die Aufgabe beruht auf § 93 und § 98, vielleicht mit Zuziehung von § 94.)

Durch Verknüpfung je zweier der drei letzten Aufgaben erhält man drei neue, welche das Dreieck vollständig bestimmen.

Die in 40†) zuletzt erwähnten Aufgaben lassen sich dahin erweitern, daß man finden solle

den geometrischen Ort eines Punktes, dessen Entfernungen von zwei gegebenen (parallelen oder nicht parallelen) geraden Linien, oder von den Peripherien zweier gegebenen konzentrischen Kreise, oder von zwei gegebenen Punkten in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Endlich ist auch der geometrische Ort für die Spitze eines Dreiecks leicht zu finden, von welchem man die Grundlinie und die Differenz der Quadrate der beiden anderen Seiten kennt. Auf Kreise übergetragen, ist er die Linie der gleichen Tangenten.

42†) Durch einen gegebenen Punkt innerhalb der Schenkel eines gegebenen Winkels eine gerade Linie so zu ziehen, daß auf ihr von jenem Punkte aus gleiche Stücke durch die Schenkel abgeschnitten werden.

(Die Auflösung beruht auf § 61, 111 in Verbindung mit § 49 oder mit § 72.)

43†) Durch vier gegebene Punkte, von denen je drei nicht in gerader Linie liegen, drei gerade Linien zu ziehen, welche ein gleichseitiges Dreieck bilden.

Wieviel solche Dreiecke sind möglich?

44†) Ein Dreieck zu zeichnen aus zwei seiner Seiten und der zur dritten gehörenden Höhe.

45†) In einer Seite eines gegebenen Dreiecks einen Punkt zu finden, der von den beiden anderen Seiten gleich weit entfernt ist.

46†) In einem gegebenen ungleichseitigen Dreieck zu einer Seite eine Parallele so zu legen, daß sie gleich der Differenz der zwischen den Parallelen liegenden Abschnitte ist.

47†) In einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt der Art zu finden, daß die Summe der Linien, welche ihn mit zwei gegebenen Punkten verbinden, ein Minimum wird, d. h. —?

48†) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem eine Seite und die zu einer anderen gehörende Transversale und Höhe gegeben sind.

49†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer seiner Seiten, der zu ihr gehörigen Transversale und der Höhe auf eine andere Seite.

50†) Ein Dreieck aus zwei seiner Seiten und der Transversale nach der dritten zu konstruieren.

51†) Ein Dreieck zu konstruieren aus einem der Winkel, seiner Halbierungslinie und irgend einer Höhe des Dreiecks.

52†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Höhe auf eine Seite, die Transversale nach einer anderen und der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel gegeben ist.

53†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer seiner Seiten, der Differenz der beiden anderen und der Differenz ihrer Gegenwinkel.

54†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer seiner Seiten, der Summe der beiden anderen und der Differenz ihrer Gegenwinkel.

Ist statt der Differenz der Winkel ihre Summe gegeben, so fallen die beiden letzten Aufgaben mit den im Anhange als Paradigmen gelösten Aufgaben V und IV zusammen.

55†) In ein gegebenes gleichseitiges Dreieck ein anderes gleichseitiges Dreieck von gegebener Seite so einzuzeichnen, daß seine Winkelpunkte in den Seiten des ersten liegen.

56†) Ein Dreieck zu konstruieren aus einem seiner Winkel und den Höhen auf die den Winkel einschließenden Seiten.

57†) Einen Rhombus aus seinen Diagonalen, desgleichen ein Quadrat aus seiner Diagonale zu konstruieren.

58†) Ein Quadrat zu zeichnen, von welchem die Summe oder die Differenz von Diagonale und Seite gegeben ist.

59†) Einen Rhombus zu konstruieren, von welchem eine Seite und die Summe oder die Differenz der beiden Diagonalen gegeben ist.

60†) Einen Rhombus zu zeichnen, von welchem man die Winkel und die Summe oder die Differenz der Diagonalen kennt.

61†) Ein Rhomboid aus einer Seite und den beiden Diagonalen, oder aus einer Seite, der Summe oder der Differenz der Diagonalen und dem Winkel der Diagonalen, oder aus seinen Winkeln, seinem Umring und einer der Diagonalen usw. zu konstruieren.

62†) Ein Dreieck aus einer seiner Seiten und den Höhen auf die beiden anderen Seiten zu konstruieren.

63†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem man die Lage einer Seite und die Fußpunkte der zu den beiden anderen Seiten gehörigen Höhen kennt.

64†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem man die Fußpunkte zweier Höhen und die Mitte einer der zu diesen Höhen gehörenden Seiten kennt.

65†) An einen gegebenen Kreis eine Tangente zu legen, welche einer gegebenen geraden Linie parallel ist.

66†) In einem gegebenen Kreise eine gegebene gerade Linie als Sehne so einzutragen, daß sie entweder einer gegebenen geraden Linie parallel, oder von einer gegebenen Kreissehne halbiert wird.

67†) In einer ihrer Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden, von welchem aus eine ihrer Größe und Lage nach gegebene gerade Linie unter einem gegebenen Winkel erscheint.

68†) Einen Punkt zu finden, von welchem aus zwei Seiten eines gegebenen Dreiecks unter gegebenen Winkeln erscheinen. (Die Pothenotsche Aufgabe.)

69†) Ein Dreieck aus einer Seite und ihrem Gegenwinkel so zu konstruieren, daß die zur Seite gehörige Transversale den Winkel im Verhältnis von 1 : 3 teilt.

70†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem eine Seite, ihr Gegenwinkel und die Differenz der Abschnitte gegeben ist, in welche jene Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird.

71†) Ein Quadrat von einem gegebenen Winkelpunkte aus so zu konstruieren, daß seine Gegenseiten durch zwei gegebene Punkte gehen.

72†) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem man einen Winkel und die von ihm ausgehende Höhe und Transversale kennt.

73†) Ein Dreieck aus einer seiner Seiten, dem Radius des umschriebenen und dem Radius des einbeschriebenen Kreises zu konstruieren.

74†) Mit einem gegebenen Radius einen Kreis zu beschreiben, der eine gegebene gerade Linie und einen gegebenen Kreis berührt.

75†) Ein gegebenes ungleichseitiges Parallelogramm in einen Rhombus zu verwandeln.

76†) Ein gegebenes gleichseitiges Dreieck so abzustumpfen, daß ein reguläres Sechseck entsteht.

77†) Eine gegebene gerade Linie, ein gegebenes Dreieck, ein Parallelogramm usw. nach einem gegebenen Verhältnis zu teilen.

Bemerkung. Bei der Konstruktion verlangter Figuren ist es zuweilen zweckmäßig, zuerst nur eine oder einige der gestellten Bedingungen in Betracht zu ziehen und danach zu konstruieren, dann erst die übrigen Bedingungen zu berücksichtigen. So wird man, wenn die Gestalt eines zu konstruierenden Dreiecks irgendwie gegeben ist, erst ein ihm ähnliches Dreieck zeichnen und nachher ihm die angemessene Größe geben; z. B. in den drei folgenden Aufgaben:

78†) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem man zwei Winkel (oder das Verhältnis zweier Seiten und einen Winkel oder das Verhältnis aller Seiten) und

entweder eine Transversale,

oder den Radius des umschriebenen,

oder den Radius des einbeschriebenen Kreises,

oder die Summe oder die Differenz zweier Seiten,

oder die Summe oder die Differenz einer Seite und einer — zugehörigen oder nicht zugehörigen — Höhe oder Transversale,

oder die Summe oder Differenz von Transversale und Höhe usw. kennt.

79†) In ein gegebenes Dreieck ein anderes einzuzeichnen, das einem gegebenen Dreieck ähnlich ist, und dessen eine Seite einer Seite des Dreiecks parallel wird.

In vielen Fällen, insbesondere bei Einzeichnung von Figuren in andere, muß man, um zur ähnlichen Figur zu kommen, erst die Aufgabe umkehren und lösen; z. B. in den Aufg. 39, 41, 42, 52, 79† und in der folgenden:

80†) Ein Dreieck aus gegebenen Winkeln so zu konstruieren, daß ein Winkelpunkt ein gegebener Punkt ist, und die beiden anderen in zwei gegebenen — parallelen oder nicht parallelen — geraden Linien liegen.

81†) Durch einen gegebenen Punkt innerhalb der Schenkel eines gegebenen Winkels an die Schenkel eine gerade Linie zu ziehen, welche in dem gegebenen Punkte im Verhältnis von m : n geteilt ist.

Ein spezieller Fall dieser Aufgabe ist Aufgabe 42.

82†) Durch den einen Durchschnittspunkt zweier einander schneidenden Kreise eine gerade Linie zu ziehen, daß die entstehenden Sehnen sich wie m : n verhalten.

83†) Von einem gegebenen Punkte außerhalb eines gegebenen Kreises in ihn eine Sekante zu ziehen, daß der äußere und der innere Abschnitt einander gleich werden oder (allgemeiner) in einem gegebenen Verhältnis stehen.

84†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Mitten der drei Seiten gegeben sind.

85†) Ein Dreieck zu konstruieren, von welchem man die Mitten zweier Seiten und den Fußpunkt irgend einer Höhe kennt.

86†) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer seiner Seiten, der Höhe auf eine zweite und der Transversale nach der dritten Seite.

87†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einem seiner Winkel, der Transversale aus ihm und der Höhe aus einem anderen Winkel.

88†) Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Transversalen und der Höhe auf eine der zu den Transversalen gehörenden Seiten.

89†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer seiner Seiten, der zugehörigen Höhe und der Transversale nach einer anderen Seite.

90†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einem seiner Winkel, der von ihm ausgehenden Höhe und der Transversale aus einem anderen Winkel.

91†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem man eine Seite und die nach den beiden anderen gehenden Transversalen kennt.

92†) Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei Transversalen und der Höhe nach der dritten Seite.

93†) Ein Dreieck zu konstruieren aus zwei seiner Transversalen und dem Winkel, unter welchem sie sich schneiden.

94†) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, der Summe oder Differenz der zu den beiden anderen gehörenden Transversalen und dem Winkel, den die Transversalen bilden.

95†) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite, dem Verhältnis der

zu den beiden anderen gehörenden Transversalen und dem Winkel der Transversalen.

96†) Ein Dreieck zu konstruieren aus der Höhe auf eine Seite, dem Verhältnis der zu den beiden anderen gehörenden Transversalen und dem Winkel der Transversalen usw.

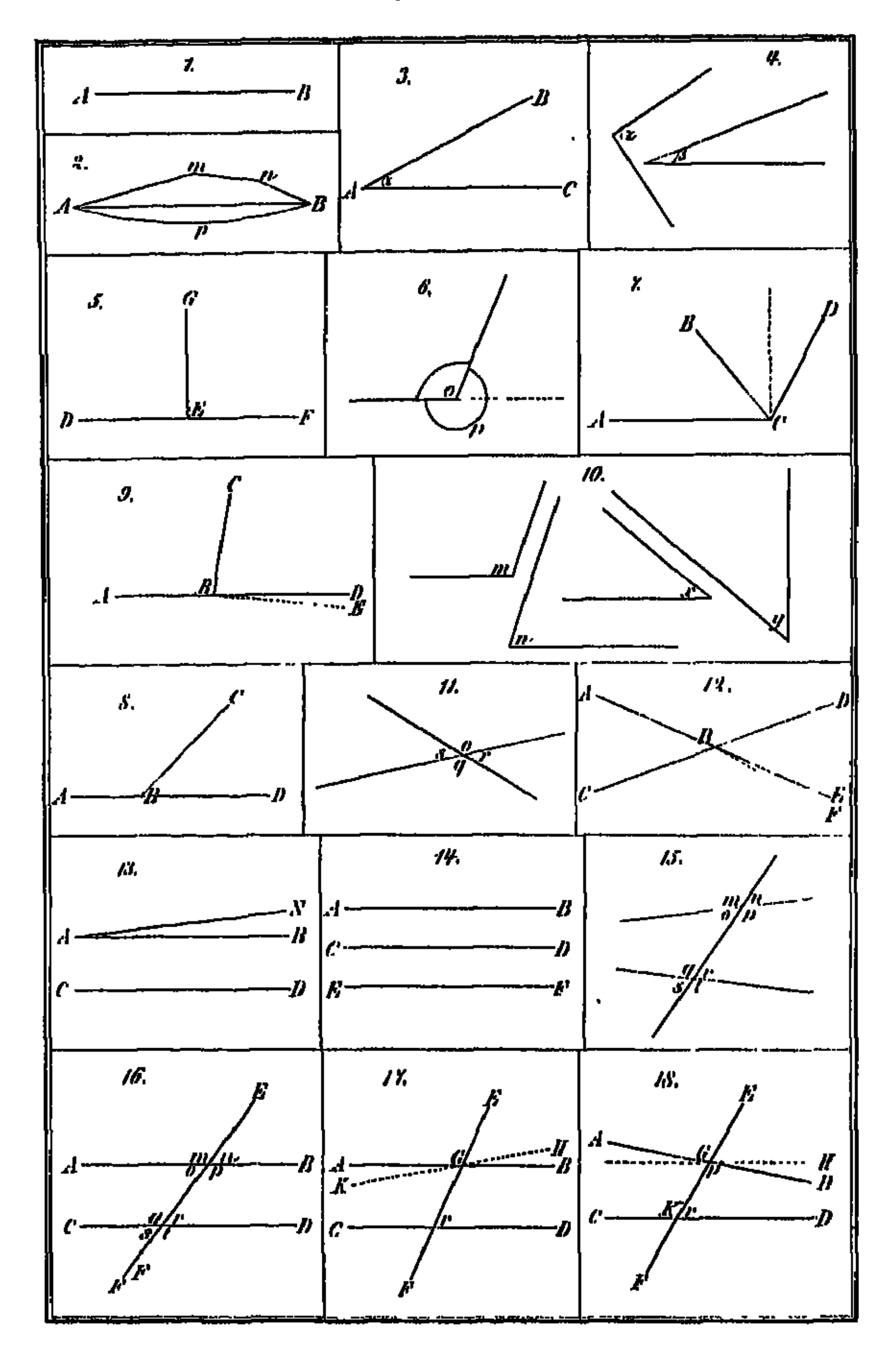
97†) Ein Dreieck zu zeichnen, von welchem die Fußpunkte der Höhen gegeben sind.

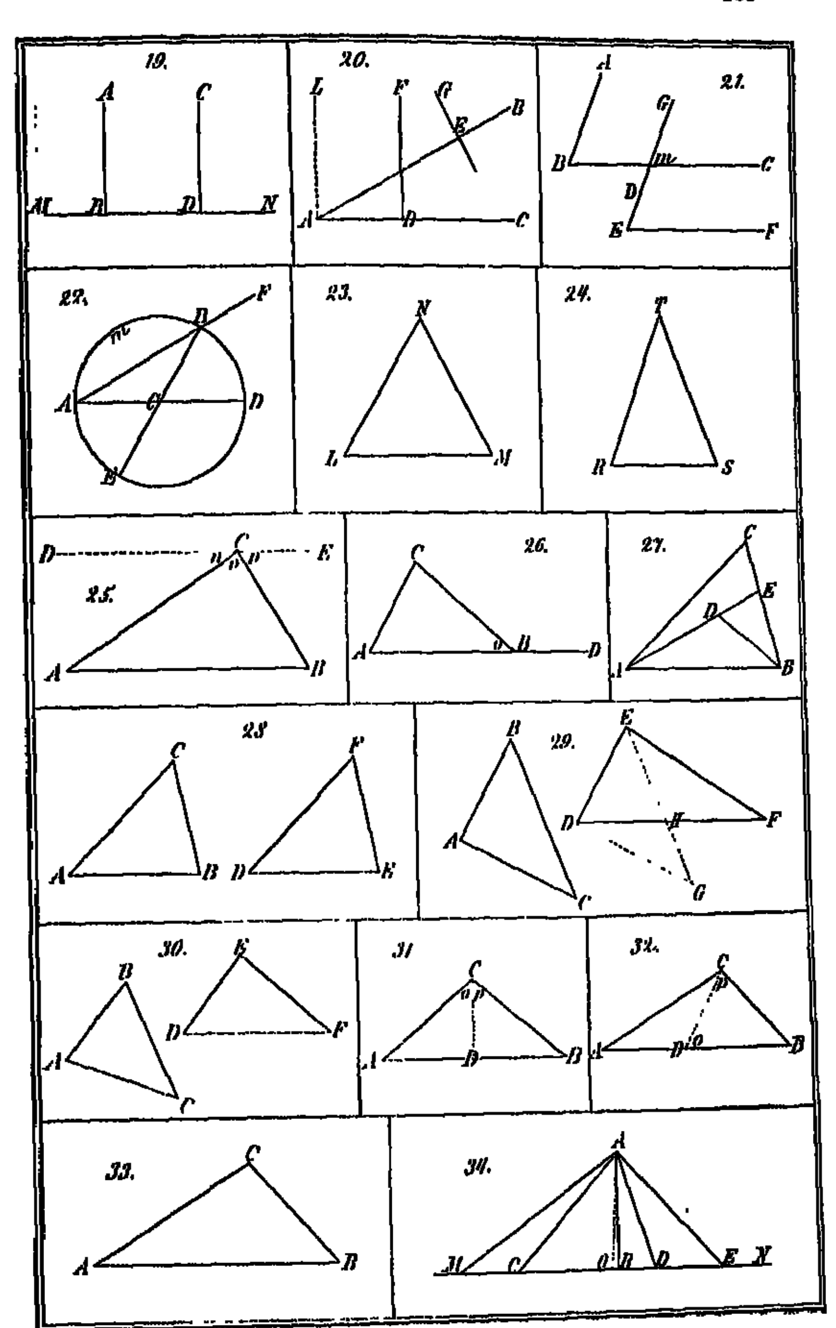
98†) In einem gegebenen Dreieck von einem Winkelpunkte aus nach der Gegenseite eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie die mittlere Proportionale zwischen den entstehenden Abschnitten wird.

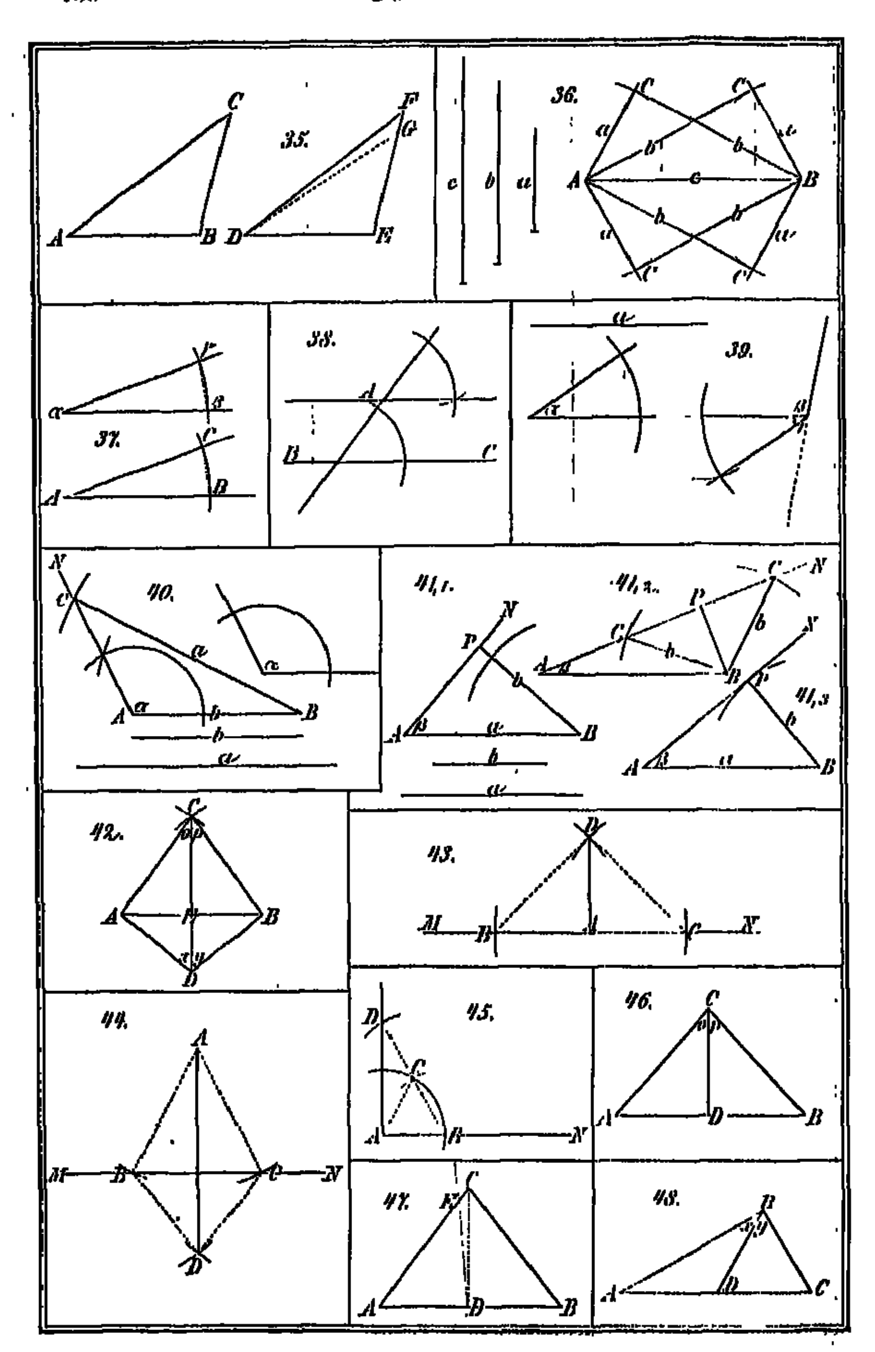
99†) Ein Dreieck zu zeichnen aus einer seiner Seiten, ihrem Gegenwinkel und der Halbierungslinie dieses Winkels.

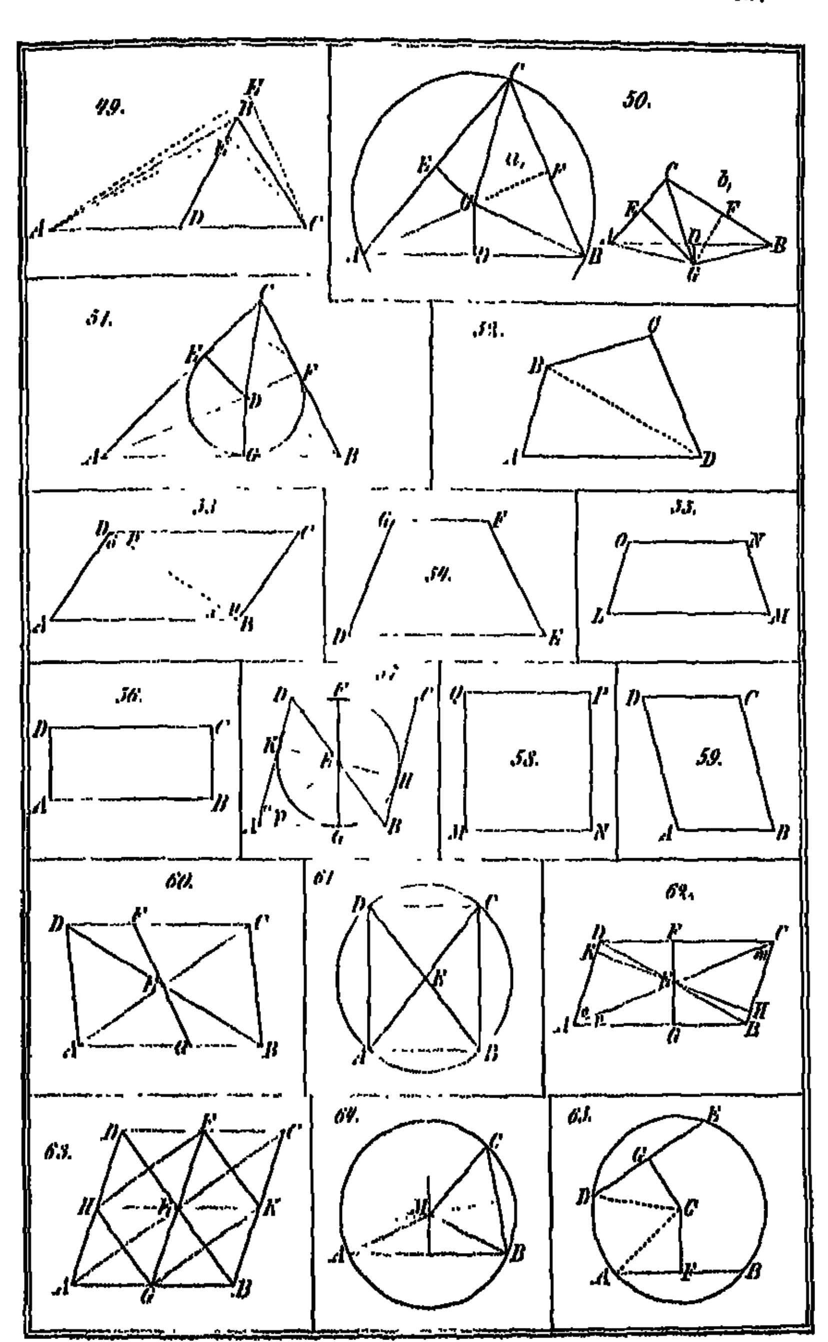
Die Auflösung dieser Aufgabe beruht schließlich auf der Lösung einer gemischten quadratischen Gleichung oder auf der Auffindung der äußeren Glieder einer stetigen Proportion, von welcher man das mittlere Glied und die Differenz der beiden äußeren Glieder kennt. Viel leichter ist die Aufgabe, wenn statt der Länge der Halbierungslinie einer der Winkel gegeben ist, welche sie mit der gegebenen Seite bildet.

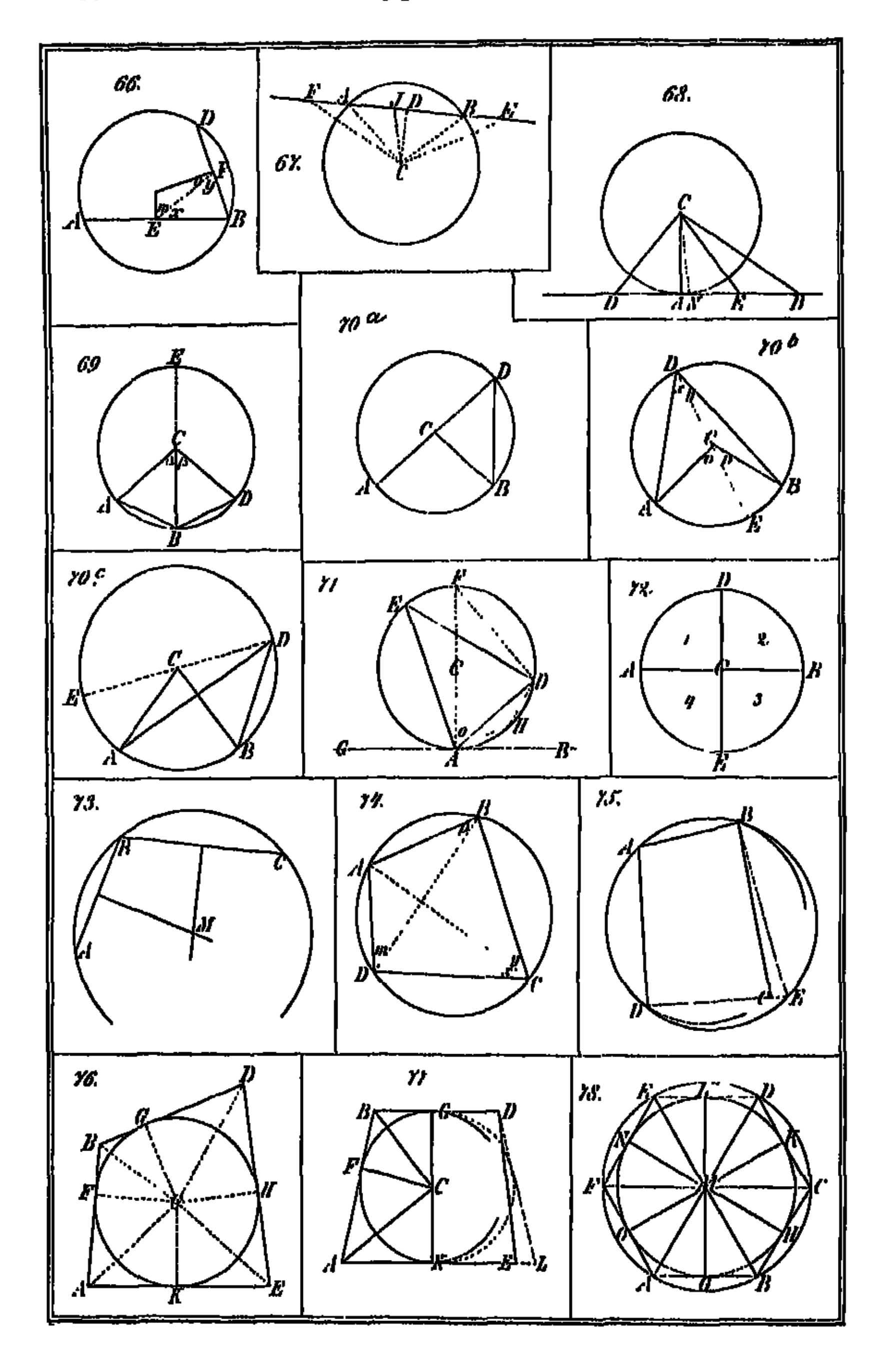
100†) Einen Kreis zu beschreiben, der durch zwei gegebene Punkte geht und einen gegebenen Kreis berührt.


1.
A
B
2.
m
n
A
B
p
3.
B
A
C
4.
5.
G
D
E
F
6.
o
p
7.
B
D
A
C
9.
C
A
B
D
E
10.
m
n
8.
C
A
B
D
11.
o
q
12.
A
D
B
C
E
F
13.
N
A
B
C
D
14.
A
B
C
D
E
F
15.
m
n
o
p
q
r
s
t
16.
E
A
m
n
o
p
B
C
q
r
s
t
D
F
17.
E
A
G
H
B
K
C
D
F
18.
E
A
G
H
B
C
K
D
F


19.
A
C
M
B
D
N
20.
L
F
G
B
E
A
D
C
21.
A
G
B
m
C
D
E
F
22.
F
D
m
A
C
D
E
23.
N
L
M
24.
T
R
S
25.
D
C
E
A
B
26.
C
A
B
D
27.
C
E
D
A
B
28
C
F
A
B
D
E
29.
B
E
D
H
F
A
C
G
30.
B
E
D
F
A
C
31
C
A
D
B
32.
C
A
D
B
33.
C
A
B
34.
A
M
C
O
B
D
E
N




49.
50.
51.
52.
56.
58.
59.
60.
63.
64.
65.



66.
A E B D F x y
67.
F A J D B E C
68.
C D A N E D
69
E C A B D
70 a
C D A B
70 b
D C A B E
70 c
C D E A B
71
F E C D H o G A B
72.
D A C B E
1 2 3 4
73.
B C A M
74.
B A D C m
75.
A B D C E
76.
D G B F H A K E
77
B G D F C A K E L
78.
E J D N K F C O H A G B

